Des exercices de rentrée

Analyse fonctionnelle

Exercice 1

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de :

$$f : x \mapsto \cos(x)\operatorname{ch}(x).$$

2. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 3 de la fonction :

$$g : x \mapsto \sqrt{1+x}.$$

3. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de la fonction :

$$h : x \mapsto \exp(\tan x).$$

Exercice 2

Donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de :

1. $w_n = \left(\dfrac{3^{\frac{1}{n}} + 4^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n$. **2.** $x_n = \left(n \sin\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}$. **3.** $v_n = n!\sin\left(\left(\mathrm{e} - \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\right)\pi\right)$.

Exercice 3

On considère la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x + 2 + \ln x \end{cases}$.

1. Montrer que f est une bijection, et dresser le tableau de variation de sa bijection réciproque g.

2. Étudier la dérivabilité de g, et exprimer g' à l'aide de g.

Exercice 4

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, admettant une limite finie a en $-\infty$ et une limite finie b en $+\infty$.

Montrer **rigoureusement** que f est bornée.

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la dérivée n – ième des fonctions :

1. $f : x \mapsto (x-1)^{n-1}\ln(1-x)$. **2.** $g : x \mapsto x^{n-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 6

Soient n un entier strictement positif, et $f : x \mapsto \dfrac{x^n \ln x}{x^2 - 1}$. Montrer que l'on peut prolonger f en une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 7

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{n k^2}{\left(an^2 + k^2\right)\left(bn^2 + k^2\right)}$, où a, b sont deux réels strictement positifs et distincts.

Exercice 8

Soit $f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{1}{\ln\left(1 + t^2\right)} \mathrm{d}t$. Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.

Exercice 9

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit g sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $g(x) = \frac{1}{x} \int_x^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que l'on peut prolonger g par continuité en 0. On note encore g ce prolongement.

2. On suppose f dérivable en 0. La fonction g est – elle dérivable en 0 ?

Exercice 10

Soit $f : x \mapsto \ln\left(1 + x^2\right)$. En appliquant une formule de Taylor avec reste intégral, montrer que

$$\int_0^1 \frac{(1+t)(1-t)^2}{\left(1+t^2\right)^2} \mathrm{d}t = \frac{\ln 2}{2}.$$

Exercice 11

Soit $f \in C^2([a,b],\mathbb{R}) \cap D^3(]a,b[,\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}\left(f'(a) + f'(b)\right) - \frac{(b-a)^3}{12} f'''(c).$$

Hint : Utiliser une fonction auxiliaire de la forme $x \mapsto f(x) - f(a) - (x-a)\frac{f'(a) + f'(x)}{2} + \frac{(x-a)^3}{12} A$

,

où A est une constante judicieusement choisie.

Exercice 12

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

1. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = P_n(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Préciser degré et coefficient dominant du polynôme P_n, et déterminer une relation de récurrence entre P_{n+1}, P_n et P_n'.

2.a. A l'aide de la formule de Leibniz, établir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_{n+1} = -2XP_n - 2nP_{n-1}$.

b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n' = -2nP_{n-1}$.

c. Montrer enfin que : $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n'' - 2XP_n' + 2nP_n = 0$.

Exercice 13

Soit f une application continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ et telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe n réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ appartenant à $]0,1[$, deux à deux distincts et tels que $\sum_{k=1}^{n} f'(x_k) = n$.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe n réels $y_1, y_2, \dots, y_n$ appartenant à $]0,1[$, deux à deux distincts, en lesquels f' ne s'annule pas et tels que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f'(y_k)} = n$.

Suites numériques

Exercice 14

Calcul du noyau de Dirichlet

Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in]0,\pi[$: $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{m} \cos(nt) = \frac{\sin\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}$.

Exercice 15

Calculer la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$. *Chercher* a *et* b *tels que* $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$.

Exercice 16

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \cos u_n)$.

1. Montrer que l'équation $x = \cos x$ admet une unique solution réelle, que l'on notera α.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

3. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\cos u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Exercice 17

Donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de : $u_n = \sin\left(\sqrt{\pi^4 + 4\pi^3 n + 2\pi^2 n^2}\right)$.

Exercice 18

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 5$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{5u_n - 9}{u_n - 1}$.

1. Montrer que l'équation $X = \frac{5X-9}{X-1}$ admet une unique solution réelle. On note α cette solution.

2. Pour tout $n \geq 0$, on pose : $v_n = \frac{1}{u_n - \alpha}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, et qu'elle est arithmétique.

3. En déduire v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

Exercice 19

Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \arctan u_n$.

Exercice 20

On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = \dfrac{e^x}{x+2}$.

1. Prouver que f possède un unique point fixe dans l'intervalle $[0,1]$, que l'on notera α.

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Prouver que cette suite converge vers α.

3. Borner f' sur $[0,1]$ et en déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \alpha - u_n \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2e}{9}\right)^n$.

4.a. En déduire la valeur de n à partir de laquelle u_n est une valeur approchée de α à 10^{-3} près,

4.b. Donner cette valeur approchée. *On écrira une fonction adaptée, en Python.*

Exercice 21

Méthode de Newton

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et soit $f \in C^2([a,b], \mathbb{R})$. On suppose que :

$$f(a) > 0\ ,\ f(b) < 0\ ,\ f' < 0 \text{ et } f'' > 0 \text{ sur } [a,b].$$

1. Montrer qu'il existe un unique $c \in\ ]a,b[$ tel que $f(c) = 0$.

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$, et $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+1} = u_n - \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)}$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, et converge vers c.

3. On note respectivement m et M le minimum de $|f'|$ et le maximum de $|f''|$ sur $[a,b]$.

a. Montrer que pour tout entier n : $0 \leq c - u_{n+1} \leq \dfrac{M}{2m}(c - u_n)^2$.

b. Montrer qu'il existe deux constantes A et q telles que pour tout entier n : $0 \leq c - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{A} q^{2^n}$. Conclure.

Exercice 22

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation $x e^x = n$ admet une unique solution $x_n \in \mathbb{R}$.

2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ et prouver que $x_n \sim \ln n$.

3. Donner un équivalent de $x_n - \ln n$.

Exercice 23

1. Montrer que l'équation $(E) : \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k = 1$ admet une unique racine dans $[0,1]$. *On posera* $f_n(x) = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k\right) - 1$, *et on notera* x_n *cette racine unique.*

2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone, et en déduire sa convergence.

<u>hint</u> *On considèrera, pour tout entier* $n \in \mathbb{N}^*$, *la quantité* $f_{n+1}(x_n)$.

3. Déterminer la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Séries numériques

Les résultats suivants pourront si nécessaire être utilisés dans tous les exercices ci – dessous :

1. *Séries exponentielles*

Pour tout $x \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge absolument, et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$.

2. *Séries géométriques*

Pour tout $q \in \mathbb{C}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n \geq 0} q^n$ converge **si et seulement si** $|q| < 1$.

Lorsque tel est le cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

2 ’. *Séries géométriques dérivées*

Pour tout $q \in \mathbb{C}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n \geq p} \frac{n!}{(n-p)!} q^{n-p}$ converge **si et seulement si** $|q| < 1$.

Lorsque tel est le cas, $\sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} q^{n-p} = \frac{p!}{(1-q)^{p+1}}$.

3. *Théorème de comparaison série/intégrale*

Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit f continue, à valeurs réelles positives, et décroissante sur $[p, +\infty[$.

Alors, la série $\sum_{n \geq p} f(n)$ converge si et seulement si $\lim_{X \to +\infty} \int_p^X f(t)\,\mathrm{d}t$ existe dans $\mathbb{R}$.

4. *Théorème spécial des séries alternées*

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante, convergeant vers 0. Alors, la série $\sum (-1)^n u_n$ converge.

Exercice 24

Etudier la nature, et, le cas échéant, déterminer la somme des séries suivantes.

1. $\sum_{n \geq 0} \frac{2n + 3^n}{4^{n+1}}$ **2.** $\sum_{n \geq 0} \frac{\cos(n)\,\mathrm{e}^{-n}}{n!}$ **3.** $\sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)^2}{3^n}$

4. $\sum_{n \geq 0} \frac{n^3}{2^n}$ **5.** $\sum_{n \geq 1} \frac{(n+1)^2}{n!}$ **6.** $\sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{n!}$

7. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ **8.** $\sum_{n \geq 3} \frac{4n-2}{n(n^2-4)}$.

Exercice 25

1. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$.

2. En déduire la nature de la série de terme général $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$.

Exercice 26

Déterminer la nature de la série de terme général :

1. $u_n = \cos\left(\dfrac{\pi n^2}{2n^2 + an + 1}\right)$, avec $a > 0$.

2. $v_n = e^{-\sqrt{n}}$.

3. $w_n = \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

Exercice 27

Soit X une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que X possède une espérance lorsque la série $\sum_{k \geq 0} k\,\mathbb{P}(X = k)$ converge. Lorsque tel est le cas, l'espérance de X est la somme de cette série.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(X = k) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k)\right) - n\,\mathbb{P}(X > n).$$

2. On suppose que X possède une espérance.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} k\,\mathbb{P}(X = k) \geq n\,\mathbb{P}(X > n)$.

b. En déduire que la série $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(X > k)$ converge, et que : $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$.

3. On suppose dans cette question que la série $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(X > k)$ converge. Montrer que $\mathbb{E}(X)$ existe.

4. Conclure.

Calcul intégral – intégration

Exercice 28

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^3 + 2x}{x^2 + x + 1}\,\mathrm{d}x$

2. $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3 - 4x^2}}$

3. $K = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x \cos x}$

4. $L = \displaystyle\int_0^{1/2} \sqrt{\frac{\arcsin x}{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x$

Exercice 29

Calculer : **1.** $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - 5t + 4}$, **2.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{2 + \sin t}$,

3. $\displaystyle\int^{x} \arctan\left(\sqrt[3]{t}\right) \mathrm{d}t$, **4.** $\displaystyle\int^{x} \frac{(\ln t)^{\alpha}}{t} \mathrm{d}t$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Note : calculer $\displaystyle\int^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ signifie ici : donner une primitive de f, sur un ou des intervalles à préciser. Pour le **2.** : on pourra poser $u = \tan \dfrac{t}{2}$.

Exercice 30

Soit $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x + \sin 2x}$.

1. Montrer que $I = \displaystyle\int_{0}^{1/2} \frac{\mathrm{d}u}{(1-u)(1+u)(1+2u)}$ (poser $u = \tan x$).

2. En déduire la valeur de I.

Exercice 31

1. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \ln\left(1 + \tan x\right) \mathrm{d}x$, à l'aide d'un changement de variable échangeant les deux bornes d'intégration, et d'une formule d'addition.

2. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1 + \cos^2 x} \mathrm{d}x$.

Exercice 32

Etudier la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_{x}^{2x} \frac{1}{\ln\left(1 + t^2\right)} \mathrm{d}t$:

1. Parité

2. Dérivée

3. variations

4. Limites aux bornes (penser au théorème des accroissements finis...).

Exercice 33

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \,\mathrm{d}t$.

1. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.

2. Calculer I_0 et I_1. En déduire la valeur de I_n pour tout entier naturel n .

3. Montrer que la suite $\left(I_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire que $I_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} I_n$.

4. Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = (n+1) I_{n+1} I_n$.

Montrer que la suite $\left(w_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

5. Déduire des deux questions précédentes que $I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Equations différentielles

Exercice 34

Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$ l'équation différentielle $(\boldsymbol{E})$: $\quad (x\ln x)\,y' + (3\ln x + 1)\,y = \dfrac{\cos^2 x}{x^2}$.

Exercice 35

Résoudre l'équation différentielle : $(\boldsymbol{E})$: $\quad \left(1 + x^2\right)^2 y' + 2xy = x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{1+x^2}}$.

Exercice 36

Résoudre les équations suivantes, sur un intervalle que l'on précisera.

1. $x^2 y' - y = \left(x^2 - 1\right)\mathrm{e}^{x}$

2. $y'\cos x + y\sin x = \cos x + \sin x$

3. $x y' + (x - 1)\,y = x^2$.

4. $x(1 - x)\,y' + y = x$

5. $xy' + y - \dfrac{2x}{\sqrt{1 - x^4}} = 0$

6. $x y' - 2y = (x + 1)^3 (x - 1)$.

Exercice 37

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 4y = 5$, $\quad y'(0) = 1$, $y(0) = 3$

2. $y'' - 2y' + y = 0$, $\quad y'(0) = y(0) = 1$

3. $y'' - 4y = x^2 + 1$

4. $y'' - 2y' + y = x\,\mathrm{ch}\,x$, $\quad y'(0) = y(0) = 0$

5. $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{x}\sin x$, $\quad y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

Exercice 38

Pour $a > 0$, on note : $\quad E_a = \left\{ f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \text{ est paire et } \forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(x + a) \right\}$.

a. Montrer que si $f \in E_a$, f' est impaire et f'' est définie et paire.

b. Montrer que : $\quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x + a) = -f(a - x)$.

c. Montrer que f est de classe C^{∞}.

d. Montrer que $f'' + f = 0$. En déduire que : $\exists\, b \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = b\cos x$. Déterminer alors E_a

e. Déterminer $F_a = \left\{ f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \text{ est impaire et } \forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(x + a) \right\}$.

Exercice 38

Résoudre : $y'' - 2y' + y = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\cos^2 x}$.

Exercice 39

Résoudre : $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{x-1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-x}$.

Exercice 40

Trouver toutes les applications $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(-x) = \mathrm{e}^x$.

Exercice 41

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $(\mathcal{E})$: $2x^2 y' + y = 1$.

Exercice 42

1. Montrer qu'il existe une et une seule fonction f de classe C^1 sur $]-\infty, 1[$, et qui est solution sur cet intervalle de l'équation différentielle : (E) : $x(1-x)y + (1-x)y' = 1$.

2. Etudier les variations de f ; tracer sa courbe représentative.

3. Etudier la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente à l'origine.

Exercice 43

a. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, puis sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle : $xy' + 3y = \dfrac{1}{x^5}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$.

b. Donner un développement limité au voisinage de 0 de la solution.