Lycée Lakanal

2024 - 2025

PC

Feuille d'exercices

Calcul différentiel

Exercice 1

Etudier la continuité en $(0,0)$ des applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

a_ $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

b_ $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y^4}{x^4+y^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

c_ $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x\,y)}{|x|+|y|} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

d_ $$f(x,y) = \begin{cases} x\,y\ln\left(x^2+y^2\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Exercice 2

Soit $f : (x,y) \mapsto \arcsin\left(\dfrac{1+x\,y}{\sqrt{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}}\right)$,

et soit $g : (x,y) \mapsto \arctan x - \arctan y$.

1. Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}^2$.

2. Calculer les dérivées partielles premières de f et de g.

3. Simplifier f à l'aide de g.

Exercice 3

Déterminer les fonctions f de classe C^1 sur un domaine D de $\mathbb{R}^2$ que l'on précisera, et vérifiant :

1. $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x y^2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = y x^2 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 5 f(x, y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3 f(x, y) \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2} \end{cases}$ 4. $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2 x \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2 x y \end{cases}$.

Exercice 4

Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ à l'aide du changement de variable $(x, y) = \left(u, v\, \mathrm{e}^{-\frac{u}{2}}\right)$.

Exercice 5

Une preuve de l'équivalence des normes en dimension finie

Partie I ***Equivalence des normes sur $\mathbb{R}^n$***

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $\| . \|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. On désigne comme toujours par $\| . \|_\infty$ la norme infini sur $\mathbb{R}^n$, définie par : $\forall\ X = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \| X \|_\infty = \max\limits_{k \in [\![1, n]\!]} | x_k |$, et l'on travaille dans l'espace $(\mathbb{R}^n, \| . \|_\infty)$.

Q1_ Montrer qu'il existe un réel $\beta > 0$ tel que : $\forall\ X \in \mathbb{R}^n,\ \| X \| \leq \beta \| X \|_\infty$.

hint *On pourra décomposer les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.*

Q2_ En déduire que $\| . \|$ est continue de $(\mathbb{R}^n, \| . \|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, | . |)$.

Q3_ Soit $S = \{ X \in \mathbb{R}^n / \| X \|_\infty = 1 \}$.

a_ Montrer que l'application $\| . \|$ admet un minimum α sur S.

b_ Montrer que $\alpha > 0$.

c_ En déduire que : $\forall\ X \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \| X \|_\infty \leq \| X \|$.

Q4_ Que peut-on conclure quant aux normes $\| . \|$ et $\| . \|_\infty$?

Q5_ Soit $\| \,.\, \|_1$ et $\| \,.\, \|_2$ deux normes sur $\mathbb{R}^n$.

Montrer que $\| \,.\, \|_1$ et $\| \,.\, \|_2$ sont équivalentes.

Partie II *Equivalence des normes en dimension finie*

Soit maintenant E un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B} = \left(e_1, ..., e_n\right)$ une base de E, et $\Phi : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & E \\ \left(x_1, ..., x_n\right) & \mapsto & \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k \end{array} \right.$.

Q6_ Soit N une norme sur E. Montrer que $N \circ \Phi$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Q7_ Soient enfin N_1 et N_2 deux normes sur E. Montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes.

Exercice 6

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = \left| \begin{array}{ll} \dfrac{x^2 y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{array} \right.$.

Montrer que f admet des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ définies sur $\mathbb{R}^2$, mais que celles-ci ne sont pas continues en $(0, 0)$.

Exercice 7

Etudier la continuité, l'existence de dérivées partielles d'ordre 1, et le caractère C^1 sur $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ des applications de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

a_ $f(x, y) = \left| \begin{array}{ll} x\, y \ln\left(|x| + |y|\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{array} \right.$.

b_ $f(x, y, z) = \left| \begin{array}{ll} \dfrac{x^3 + y^3 + z^3}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} & \text{si } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{array} \right.$.

Exercice 8

Fonctions convexes sur $\mathbb{R}^n$

Soit $n \geq 2$. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique $\langle \,.\, | \,.\, \rangle$, de norme associée $\| \,.\, \|$.

Soit f une application de classe C^1 définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, ***convexe***, *i.e.* telle que :

$$\forall (X, Y) \in \left(\mathbb{R}^n\right)^2, \ \forall \lambda \in [0,1], \ f\left((1-\lambda) X + \lambda Y\right) \leq (1-\lambda) f(X) + \lambda f(Y).$$

*Cette relation est appelée **inégalité de convexité** de l'application f.*

Pour tout couple $(H, X) \in \left(\mathbb{R}^n\right)^2$, on définit la fonction $\varphi_{H,X}$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \varphi_{H,X}(t) = f(X + tH).$$

Q1_ **a_** Montrer que $\varphi_{H,X}$ est une application convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

b_ Montrer que l'application $\varphi_{H,X}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et calculer $\varphi_{H,X}'$.

c_ En déduire que : $\varphi_{H,X}'(0) \leq \varphi_{H,X}(1) - \varphi_{H,X}(0)$.

Q2_ Montrer que : $\forall (U, V) \in \left(\mathbb{R}^n\right)^2, \ \left\langle \nabla f(U) \mid V - U \right\rangle \leq f(V) - f(U)$.

Q3_ Soit X_0 un point critique de f. Montrer que f admet un minimum global en X_0.

Exercice 9

Fonctions positivement homogènes

A

Une application f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est dite ***positivement homogène de degré α*** sur $\mathbb{R}^n$ ssi :

$$\forall \left(x_1, ..., x_n\right) \in \mathbb{R}^n, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \ f\left(\lambda x_1, ..., \lambda x_n\right) = \lambda^\alpha f\left(x_1, ..., x_n\right).$$

Q1_ Donner des exemples d'applications positivement homogènes de degrés -2, et 1.

Q2_ Que peut-on dire d'une application positivement homogène de degré 0 ?

Q3_ Soit $f \in C^1\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}\right)$. Montrer que si f est positivement homogène de degré α sur $\mathbb{R}^n$, alors ses dérivées partielles sont positivement homogènes de degré $\alpha - 1$.

Q4_ Soit $f \in C^1\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}\right)$. Montrer que f est positivement homogène de degré α sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si elle vérifie l'***équation d'Euler*** :

$$\forall \left(x_1, ..., x_n\right) \in \mathbb{R}^n, \ \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k}\left(x_1, ..., x_n\right) = \alpha f\left(x_1, ..., x_n\right).$$

On pourra introduire l'application $\varphi : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \varphi(t) = f\left(t x_1, \ldots, t x_n\right) \end{array} \right)$.

B

A l'aide de **A**, on souhaite déterminer toutes les applications $f \in C^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}\ . \quad (*)$$

Q5_ Déterminer une solution positivement homogène f_0.

Q6_ Montrer que f est solution de $(*)$ si et seulement si $g = f - f_0$ vérifie :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Q7_ Montrer alors que g est nécessairement constante, et conclure.

Exercice 10

Déterminer toutes les applications $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que l'application φ définie par :

$$\varphi : \left(\begin{array}{ccc} \Omega = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \varphi(x, y) = f\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{array} \right.$$

vérifie sur Ω la relation : $\Delta \varphi = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$.

Exercice 11

Soit $f : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x^3 + 6x^2 + 3y^2 - 12xy + 9x \end{array} \right.$.

Déterminer les extrema *(locaux, puis globaux)* de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 12

Soit $f : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & e^x + e^y + e^{-x-y} \end{array} \right.$.

1. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R},\ e^t \geq 1 + t$.

2. Déterminer les points critiques de f et donner leur nature. Existe – t – il un maximum ? Un minimum ?

Exercice 13

Déterminer les extrema (locaux, puis globaux) de la fonction $f : \left(\begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 6\left(x^2 - y^2\right) \end{array} \right.$.

Exercice 14

Pour tout réel a différent de 0 et de $-\dfrac{1}{2}$, on définit la fonction f_a de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f_a(x, y) = \left(1 + y + xy + ax^2\right) e^{y}.$$

1.a. Calculer les dérivées partielles premières de f_a .

b. En déduire que f_a possède deux points critiques, et donner leurs coordonnées.

3.a Examiner, pour chacun des deux points critiques, à quelle condition portant sur a , f_a présente en ce point un extremum local.

b. Déterminer, en distinguant trois cas, si f_a présente sur $\mathbb{R}^2$ un maximum global ou un minimum global, et donner sa valeur en fonction de a .

Exercice 15

Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1, et soit Ω le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ \ x > y > 0\right\}.$$

On suppose qu'il existe $F : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\mathrm{d}F = f(x + y)\left(y^2\, \mathrm{d}x + x^2\, \mathrm{d}y\right) .$$

1. Déterminer une équation différentielle vérifiée par f sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. En déduire la fonction f, à une constante multiplicative près.

3. Déterminer alors, en fonction de cette constante, la fonction F .

Exercice 16

On cherche les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et telles que

$$\forall (u\ v) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) + 2u\frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = 0 \qquad (\mathbf{1})$$

Soit $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \Phi(x, y) = \left(x, y + x^2\right)$.

1. En déterminant son application réciproque, montrer que Φ est bijective.

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On pose $g = f \circ \Phi$.

Montrer que f est solution de $(\mathbf{1})$ si et seulement si $\dfrac{\partial g}{\partial x} = 0$.

3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Montrer que f est solution de $(\mathbf{1})$ si et seulement si il existe $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2,\ f(u\ v) = h\left(v - u^2\right)$.

Exercice 17

Soit $E = C^{\infty}\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$. Soit a un réel non nul donné. Pour tout $f \in E$, on pose

$$\Omega(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + a\,\frac{\partial f}{\partial y} .$$

1. Montrer que Ω définit un endomorphisme de E.

2. Déterminer $\operatorname{Ker} \Omega$ en posant $u = x$ et $v = y - a\,x$.

3. Déterminer $\Omega^n(f)$ à l'aide des dérivées partielles successives de f.

Exercice 18

1. Montrer que $(x, y) \mapsto \left(x\,y, \dfrac{x}{y} \right)$ est une bijection C^1 de $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ vers $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$.

2. Déterminer les fonctions $f \in C^2\left(\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \mathbb{R}\right)$ vérifiant : $x^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Exercice 19

Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} \right) f^2 - x^2 - y^2 = 0 .$$

Exercice 20

Soit $f : (x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \mapsto f(x, y) = x \ln y + y \ln x$.

a. Montrer que $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}, \dfrac{1}{\mathrm{e}} \right)$ est un point critique de f.

b. Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $(0,\ 0)$ de $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}(1 + x), \dfrac{1}{\mathrm{e}}(1 + y) \right)$.

c. f présente – t – elle en $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}, \dfrac{1}{\mathrm{e}} \right)$ un minimum local ? Un maximum local ?

d. f présente – t – elle en $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}, \dfrac{1}{\mathrm{e}} \right)$ un minimum global ? Un maximum global ?

Exercice 21

On pose $\varphi : \mathbb{R}_+^* \times \left] -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} \right[\to \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, (r, \theta) \mapsto \left(r\cos(\theta), r\sin(\theta) \right)$.

a) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective.

b) Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, et $g = f \circ \varphi$. Que peut-on dire de g ?

c) Calculer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f.

d) Résoudre sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ l'équation aux dérivées partielles : $(\mathrm{E})\quad -y\dfrac{\partial f}{\partial x} + x\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Exercice 22

Soit $f : [-1,1] \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 - \sqrt{1 - x^2}\cos(y)$.

On remarquera que f est continue sur $[-1,1] \times \mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[\times \mathbb{R}$.

a) Déterminer les points critiques de f sur $[0,1[\times [0,\pi]$.

b) Calculer $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\pi\right)-f(x,y)$. f présente-t-il en $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\pi\right)$ un maximum global ?

c) Quel est le signe de $f(0,y)-1$?

Donner un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $x\mapsto f(x,\pi)$.

f présente-t-il en $(0,\pi)$ un extremum local ?

d) f présente-t-il en $(0,0)$ un minimum global ?

e) Soit $y_0\in[0,\pi]$. f présente-t-il en $(1,y_0)$ un extremum local ?

On distinguera les cas : $y_0<\frac{\pi}{2}, y_0>\frac{\pi}{2}$, $y_0=\frac{\pi}{2}$.