PC

Fonctions de plusieurs variables

Quelques corrigés

2024 - 2025

Exercice 10

Déterminer toutes les applications $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que l'application φ définie par :

$$\varphi : \begin{cases} \Omega = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \quad \varphi(x, y) = f\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases}$$

vérifie sur Ω la relation : $\Delta \varphi = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$.

On note $\psi : \begin{cases} \Omega = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \quad \dfrac{y}{x} \end{cases}$. L'application $\varphi = f \circ \psi$ est définie et de classe C^2 sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et on calcule pour tout

$(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$: $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = -\dfrac{y}{x^2} f'\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{2y}{x^3} f'\left(\dfrac{y}{x}\right) + \dfrac{y^2}{x^4} f''\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = \dfrac{1}{x} f'\left(\dfrac{y}{x}\right)$,

$\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{1}{x^2} f''\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Et donc $\Delta \varphi(x, y) = \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{2y}{x} f'\left(\dfrac{y}{x}\right) + \left(1 + \dfrac{y^2}{x^2}\right) f''\left(\dfrac{y}{x}\right)\right)$.

Il est immédiat que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \Delta \varphi(x, y) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, 2t f'(t) + \left(1 + t^2\right) f''(t) = 0$.

C'est-à-dire que ce laplacien est partout nul si et seulement si f' est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$y' + \dfrac{2t}{1 + t^2} y = 0$. On trouve sans difficulté pour solutions de cette équation différentielle les fonctions $t \mapsto \dfrac{a}{1 + t^2}$, $a \in \mathbb{R}$,

ce qui donne pour fonctions $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $\Delta \varphi = 0$ les fonctions $f : t \mapsto a \arctan(t) + b$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 11

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \quad \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \quad x^3 + 6x^2 + 3y^2 - 12xy + 9x \end{cases}$. Déterminer les extrema *(locaux, puis globaux)* de f sur $\mathbb{R}^2$.

Détermination des points critiques

L'application f est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, ses extrema sont atteints en des points critiques.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x - 4y + 3 = 0 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \text{ (subst.)} \\ y = 2x \end{cases}$,

d'où $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ ou } x = 1 \\ y = 2x \end{cases}$. Ainsi f admet exactement deux points critiques, à savoir les points $A = (1, 2)$ et

$B = (3, 6)$.

Etude locale au voisinage de A

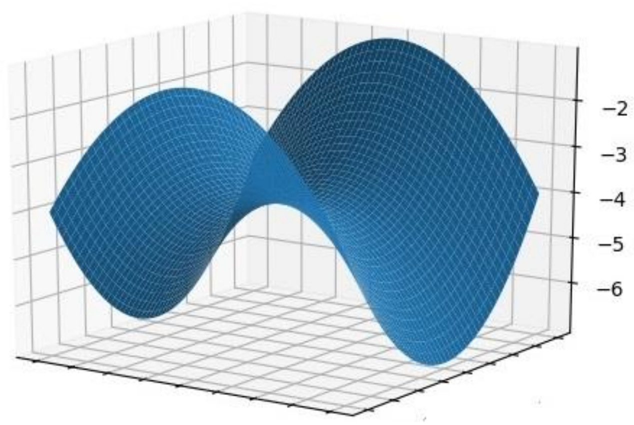
On a $f(1+h, 2+k) = (1+h)^3 + 6(1+h)^2 + 3(2+k)^2 - 12(1+h)(2+k) + 9(1+h)$, ce qui donne :

$f(1+h, 2+k) = -4 + 3\left(k^2 - 4hk + 3h^2\right) + h^3$, et donc :

$$\begin{aligned} f(1+h, 2+k) &\underset{(h,k)\to(0,0)}{=} -4 + 3\left((k-2h)^2 - h^2\right) + o\left(\|(h,k)\|^2\right) \\ &\underset{(h,k)\to(0,0)}{=} f(A) + 3\left((k-2h)^2 - h^2\right) + o\left(\|(h,k)\|^2\right) \end{aligned}$$

On en déduit que : $f\left(A + (h, 2h)\right) \underset{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}}{<} f(A)$, et que $f\left(A + (0, k)\right) \underset{\substack{k \to 0 \\ k \neq 0}}{>} f(A)$.

Dans tout voisinage de A, il existe des points M tels que $f(M) < f(A)$, et des points M tels que $f(M) > f(A)$. La fonction f ne présente en A ni minimum local, ni maximum local : A est un point col.

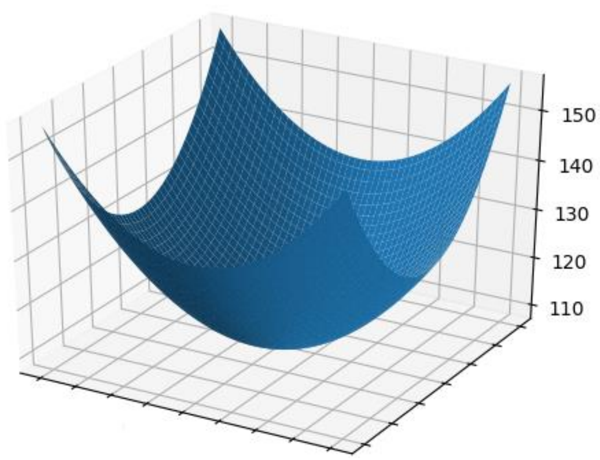


Etude locale au voisinage de B

De même, $f(3+h, 6+k) = (3+h)^3 + 6(3+h)^2 + 3(6+k)^2 - 12(3+h)(6+k) + 9(3+h)$, d'où :

$$\begin{aligned} f(3+h, 6+k) &\underset{(h,k)\to(0,0)}{=} 108 + 3\left(11h^2 - 12hk + 3k^2\right) + h^3 \\ &\underset{(h,k)\to(0,0)}{=} f(B) + 3\left((k-2h)^2 + 7h^2\right) + o\left(\|(h,k)\|^2\right) \end{aligned}$$

On a $f\left(B + (h,k)\right) \underset{(h,k)\to(0,0)}{\geq} f(B)$: la fonction f présente en B un minimum local.



Existence d'extrema globaux

La fonction f n'admet pas de maximum local ; a fortiori, elle n'a pas de maximum global.

On observe que, par exemple : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x, 0) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^3 + 6x^2 + 9x\right) = -\infty$. Ceci assure que f n'admet pas de minimum global.

Exercice 12

Soit $f : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & e^x + e^y + e^{-x-y} \end{array} \right.$.

1. Montrer que : $\forall\, t \in \mathbb{R},\ e^t \geq 1 + t$.

2. Déterminer les points critiques de f et donner leur nature. Existe – t – il un maximum ? Un minimum ?

1. On étudie la fonction $t \mapsto e^t - 1 + t$.

2. • *Détermination des points critiques de f* :

La fonction f est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$. Soit $M = (x, y) = \mathbb{R}^2$; dire que M est un point critique de f, c'est dire que : $(*)$: $\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{array} \right.$. On a $(*) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^x - e^{-x-y} = 0 \\ e^y - e^{-x-y} = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^{2x+y} = 1 \\ e^{x+2y} = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{array} \right.$, et l'on en déduit immédiatement que $O = (0, 0)$ est l'unique point fixe de f.

• *Nature locale du point critique* :

On a :

$$\begin{aligned} f(x, y) &\underset{(x,y)\to(0,0)}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right) + \left(1 + y + \frac{y^2}{2} + o\left(y^2\right)\right) \\ &\qquad + \left(1 - (x + y) + \frac{(x+y)^2}{2} + o\left((x+y)^2\right)\right) \\ &\underset{(x,y)\to(0,0)}{=} 3 + x^2 + xy + y^2 + o\left(\|(x, y)\|^2\right) \\ &\underset{(x,y)\to(0,0)}{=} 3 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 + o\left(\|(x, y)\|^2\right) \\ &\underset{(x,y)\to(0,0)}{=} f(0, 0) + \underbrace{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2}_{\geq 0\ *} + o\left(\|(x, y)\|^2\right) \end{aligned}$$

Pour (x, y) au voisinage de $(0, 0)$, $f(x, y)$ est supérieur ou égal à $f(0, 0)$. Ainsi, la fonction f présente en O un minimum local.

* L'argument précis est : $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0$ pour (x, y) non nul (et au voisinage de O). Pourquoi $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$ ne suffit-il pas ?)

• *Extrema globaux de f :*

◦ La fonction f n'admet pas de maximum local. A fortiori, f n'admet pas de maximum global.

◦◦ D'après la question **1.**, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) \geq (1 + x) + (1 + y) - (1 - x - y) = 3 = f(O)$.

On en déduit que f présente en O un minimum global.

Exercice 13

Déterminer les extrema (locaux, puis globaux) de la fonction $f : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x^3 + y^3 - 6\left(x^2 - y^2\right) \end{array} \right.$.

La fonction f est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, ses extremums locaux sont donc parmi ses points critiques.

On a $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 12x = 0 \\ 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$, on en déduit facilement que les points critiques de f sont :

$A = (0,0)$, $B = (4,0)$, $C = (0,-4)$, $D = (4,-4)$.

Comme 0 correspond à un maximum local de $x \mapsto x^3 - 6x^2$, et à un minimum local de $y \mapsto y^3 - 6y^2$, A ne correspond pas à un extremum local de f. Même raisonnement pour D.

En revanche, 0 correspond à un maximum local de $x \mapsto x^3 - 6x^2$ et -4 à un maximum local de $y \mapsto y^3 - 6y^2$, donc C correspond à un maximum local de f.

De même, B correspond à un minimum local de f.

Exercice 17

Soit $E = C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Soit a un réel non nul donné. Pour tout $f \in E$, on pose : $\Omega(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x} + a\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

1. Montrer que Ω définit un endomorphisme de E.

2. Déterminer $\operatorname{Ker}\Omega$ en posant $u = x$ et $v = y - ax$.

3. Déterminer $\Omega^n(f)$ à l'aide des dérivées partielles successives de f.

1. Pour tout $f \in E$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont dans $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$: Ω est bien définie de E dans E.

Soient $f, g \in E$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $h = \lambda f + g$. On a

$$\begin{aligned}\Omega(h) = \Omega(\lambda f + g) &= \frac{\partial(\lambda f + g)}{\partial x} + a\frac{\partial(\lambda f + g)}{\partial y} \\ &= \left(\lambda\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}\right) + a\left(\lambda\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y}\right) = \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x} + a\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial g}{\partial x} + a\frac{\partial g}{\partial y}\right) \\ &= \lambda\Omega(f) + \Omega(g),\end{aligned}$$

donc Ω est linéaire : $\boxed{\Omega \text{ définit un endomorphisme de } E}$.

2. L'application $\varphi : (x,y) \mapsto (x, y - ax)$ est clairement un C^1 – difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui – même, et sa bijection réciproque est $\psi : (u,v) \mapsto (u, v + au)$. Posons $f = g \circ \varphi$; on a donc pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = g(x, y - ax)$. Alors pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(x, y - ax) - a\frac{\partial g}{\partial v}(x, y - ax) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial v}(x, y - ax).$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + a\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 &\Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial g}{\partial u}(x, y - ax) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists A \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ g(u,v) = A(v) \\ &\Leftrightarrow \exists A \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = g \circ \varphi(x,y) = A(y - ax) :\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Le noyau de } \Omega \text{ est l'ensemble des fonctions } f : (x,y) \mapsto A(y - ax),\ A \text{ décrivant } C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})}$.

3. On va prouver, par une récurrence analogue à celle établissant le formule du binôme de Newton, la relation :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \Omega^n(f) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k} \partial y^k}.$$

Pour $n = 0$, $\Omega^0(f) = Id_E(f) = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k \frac{\partial^0 f}{\partial x^{0-k} \partial y^0}$ est une évidence. Supposons le résultat acquis à un rang $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}
\Omega^{n+1}(f) &= \Omega\left(\Omega^n(f)\right) \\
&= \Omega\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k} \partial y^k}\right) \\
&= \frac{\partial\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k} \partial y^k}\right)}{\partial x} + a\,\frac{\partial\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k} \partial y^k}\right)}{\partial x} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \frac{\partial^n f}{\partial x^{n+1-k} \partial y^k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k} \partial y^{k+1}} :
\end{aligned}$$

pour la dernière étape, on a utilisé le théorème d'interversion de Schwarz, licite puisque f est de classe C^∞.

On continue :

$$\begin{aligned}
\Omega^{n+1}(f) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \frac{\partial^n f}{\partial x^{n+1-k} \partial y^k} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k \frac{\partial^n f}{\partial x^{n+1-k} \partial y^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} a^k \frac{\partial^n f}{\partial x^{n+1-k} \partial y^k} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k \frac{\partial^n f}{\partial x^{n+1-k} \partial y^k}
\end{aligned}$$

(les termes rajoutés sont nuls : $\binom{n}{n+1} = \binom{n}{-1} = 0$).

Enfin, $\Omega^{n+1}(f) = \sum_{k=0}^{n+1} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] a^k \frac{\partial^n f}{\partial x^{n+1-k} \partial y^k}$, et la formule de Pascal permet d'en conclure que

$\Omega^{n+1}(f) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k \frac{\partial^n f}{\partial x^{n+1-k} \partial y^k}$, ce qui achève la récurrence.

Exercice 19

Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante : $\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right) f^2 - x^2 - y^2 = 0$.

On va résoudre cette équation sur $D = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par exemple.

Vue la symétrie des données, passer en coordonnées polaires semble logique. On pose donc pour $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

$g(\rho, \theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. La fonction g ainsi construite est de classe C^1, et l'on a pour tout $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta) = \cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) + \sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho, \theta) = -\rho\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) + \rho\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\ldots$$

cette deuxième expression étant établie pour la beauté du sport, car, en observant la première, on voit que f vérifie $\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)f^2-x^2-y^2=0$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ si et seulement si l'on a

sur $\mathbb{R}^*\times\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $g^2(\rho,\theta)\frac{\partial g}{\partial\rho}(\rho,\theta)=\rho$.

Ceci est réalisé si et seulement si il existe une fonction $A:\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to\mathbb{R}$ de classe C^1 telle que pour tout

$(\rho,\theta)\in\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi[$, $\frac{1}{3}g^3(\rho,\theta)=\frac{1}{2}\rho+A(\theta)$. Alors,

f est solution de $\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)f^2-x^2-y^2=0$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ si et seulement si il existe une fonction $A:\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to\mathbb{R}$ de classe C^1 telle que pour tout $(x,y)\in D$, $f(x,y)=\sqrt[3]{\frac{3}{2}(x^2+y^2)+3A\left(\arctan\frac{y}{x}\right)}$.

Exercice 20

Soit $f:(x,y)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2\mapsto f(x,y)=x\ln y+y\ln x$.

a. Montrer que $\left(\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$ est un point critique de f.

b. Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $(0,\ 0)$ de $f\left(\frac{1}{e}(1+x),\frac{1}{e}(1+y)\right)$.

c. f présente – t – elle en $\left(\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$ un minimum local ? Un maximum local ?

d. f présente – t – elle en $\left(\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$ un minimum global ? Un maximum global ?

a. Pour le même prix (enfin, ça complique quand même un peu les choses), prouvons que $\left(\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$ est le seul point critique de f.

La fonction f est de classe C^1, et, pour tout $(x,y)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, (x,y) est point critique de f si et seulement si

$\operatorname{grad}(f)(x,y)=0 \qquad (*)$.

On a $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}\ln y+\frac{y}{x}=0\\ \ln x+\frac{x}{y}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{y}{\ln y}\\ y=-\frac{x}{\ln x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\ln x<0 \text{ et } x=\dfrac{\frac{x}{\ln x}}{\ln\left(-\frac{x}{\ln x}\right)}\\ y=-\frac{x}{\ln x}\end{cases}$,

d'où $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}\ln x<0 \text{ et } 1=\dfrac{1}{(\ln x)(\ln(x)-\ln(-\ln x))}\\ y=-\frac{x}{\ln x}\end{cases}$, et en posant $u=\ln x$,

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} u < 0 \text{ et } u\left(u - \ln(-u)\right) = 1 \\ y = -\dfrac{x}{\ln x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u < 0 \text{ et } u - \ln(-u) - \dfrac{1}{u} = 0 \\ y = -\dfrac{x}{\ln x} \end{cases}.$$

En étudiant la fonction $u \mapsto u - \ln(-u) - \dfrac{1}{u}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on constate qu'elle est strictement croissante et s'annule en -1 ; elle ne s'annule donc qu'en ce point, par conséquent $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = -1 \\ y = -\dfrac{x}{\ln x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{e} \\ y = \dfrac{1}{e} \end{cases}$:

$\boxed{\left(\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}\right) \text{ est bien l'unique point critique de } f}$.

b. On a

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{e}(1+x), \frac{1}{e}(1+y)\right) &= \frac{1}{e}\left[(1+x)\ln\left(\frac{1}{e}(1+y)\right) + (1+y)\ln\left(\frac{1}{e}(1+x)\right)\right] \\ &= \frac{1}{e}\left[-2 - x - y + (1+x)\ln(1+y) + (1+y)\ln(1+x)\right] \\ &\underset{(0,0)}{=} \frac{1}{e}\left[-2 - x - y + (1+x)\left(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3}\right) + (1+y)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\right] + \circ\left(\|(x,y)\|^3\right), \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\begin{aligned} &f\left(\frac{1}{e}(1+x), \frac{1}{e}(1+y)\right) \\ &\quad \underset{(0,0)}{=} \frac{1}{e}\left[-2 - \frac{y^2}{2} + 2xy - \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{xy^2}{2} - \frac{x^2y}{2} + \frac{x^3}{3}\right] + \circ\left(\|(x,y)\|^3\right). \end{aligned}}$$

c. D'après ce qui précède,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{e}(1+x), \frac{1}{e}(1+y)\right) &\underset{(0,0)}{=} f\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right) + \frac{1}{e}\left(-\frac{x^2}{2} + 2xy - \frac{y^2}{2}\right) + \circ\left(\|(x,y)\|^2\right) \\ &\underset{(0,0)}{=} f\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right) + \frac{1}{e}\left(-\frac{1}{2}(x-2y)^2 + \frac{3}{2}y^2\right) + \circ\left(\|(x,y)\|^2\right). \end{aligned}$$

On en déduit que $f\left(\dfrac{1}{e}(1+2y), \dfrac{1}{e}(1+y)\right) \underset{y \to 0}{=} f\left(\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}\right) + \dfrac{3}{2e}y^2 + \circ\left(y^2\right)$,

et $f\left(\dfrac{1}{e}(1+x), \dfrac{1}{e}\right) \underset{x \to 0}{=} f\left(\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}\right) - \dfrac{1}{2e}x^2 + \circ\left(x^2\right)$,

d'où bien sûr $f\left(\dfrac{1}{e}(1+2y), \dfrac{1}{e}(1+y)\right) \underset{y \to 0}{>} f\left(\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}\right)$ et $f\left(\dfrac{1}{e}(1+x), \dfrac{1}{e}\right) \underset{x \to 0}{<} f\left(\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}\right)$.

Ainsi, dans tout voisinage de $\left(\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}\right)$, il existe des points en lesquels f prend des valeurs strictement supérieures à $f\left(\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}\right)$, et des en lesquels f prend des valeurs strictement inférieures à $f\left(\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}\right)$:

$\boxed{\text{la fonction } f \text{ ne présente en } \left(\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}\right) \text{ ni minimum local, ni minimum local}}$.

d. f n'admettant pas d'extremum local, elle ne risque pas d'avoir des extrema globaux.

Exercice 21

On pose $\varphi : \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, (r,\theta) \mapsto \left(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\right)$.

a) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective.

b) Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, et $g = f \circ \varphi$. Que peut-on dire de g ?

c) Calculer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f.

d) Résoudre sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ l'équation aux dérivées partielles : $(\mathrm{E})\quad -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Solution

a) On vérifie facilement que φ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

φ est de classe $\mathcal{C}^1$ car ses composantes le sont.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On a alors :

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ \dfrac{y}{x} = \tan(\theta) \end{cases} \text{ (car } x \neq 0\text{) } \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases} \text{ (car } r > 0 \text{ et } \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\text{).}$$

φ est donc bijective de bijection réciproque : $\varphi^{-1} : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, (x,y) \to \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\mapsto \left(\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)\right)$.

Remarquons que φ^{-1} est elle aussi de classe $\mathcal{C}^1$.

b) g est de classe $\mathcal{C}^1$ comme composée d'applications de classe $\mathcal{C}^1$.

c) On calcule avec la règle de la chaîne (et en notant x et y les deux composantes de φ) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial r} = \dfrac{\partial x}{\partial r}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial r}\dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial \theta} = \dfrac{\partial x}{\partial \theta}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial \theta}\dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases}, \text{ c'est-à-dire : } \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial r} = \cos(\theta)\dfrac{\partial f}{\partial x} + \sin(\theta)\dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial \theta} = -r\sin(\theta)\dfrac{\partial f}{\partial x} + r\cos(\theta)\dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases},$$

ce qui donne : $\begin{cases} r\dfrac{\partial g}{\partial r} = x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial \theta} = -y\dfrac{\partial f}{\partial x} + x\dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$.

d) On remarque que $(\mathrm{E}) \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial \theta} = 0 \Leftrightarrow \exists h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}), \forall (r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, g(r,\theta) = h(r)$.

C'est-à-dire : $(\mathrm{E}) \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial \theta} = 0 \Leftrightarrow \exists h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}), \forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, f(x,y) = h\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

Exercice 22

Soit $f : [-1,1] \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^2 - \sqrt{1-x^2}\cos(y)$.

On remarquera que f est continue sur $[-1,1] \times \mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[\times \mathbb{R}$.

a) Déterminer les points critiques de f sur $[0,1[\times [0,\pi]$.

b) Calculer $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \pi\right) - f(x,y)$. f présente-t-il en $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \pi\right)$ un maximum global ?

c) Quel est le signe de $f(0,y) - 1$?

Donner un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $x \mapsto f(x,\pi)$.

f présente-t-il en $(0,\pi)$ un extremum local ?

d) f présente-t-il en $(0,0)$ un minimum global ?

e) Soit $y_0 \in [0,\pi]$. f présente-t-il en $(1,y_0)$ un extremum local ?

On distinguera les cas : $y_0 < \frac{\pi}{2}, y_0 > \frac{\pi}{2}$, $y_0 = \frac{\pi}{2}$.

Solution

a) On calcule pour tout $(x,y) \in [0,1[\times [0,\pi]$: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cos(y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\sqrt{1-x^2}\sin(y)$.

De sorte que $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \Leftrightarrow (y=0 \text{ ou } y=\pi)$.

Si $y=0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \Leftrightarrow 2x = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Leftrightarrow x=0$.

Si $y=\pi$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Leftrightarrow \left(x=0 \text{ ou } x=\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Les points critiques, pour la zone étudiée, sont donc les points : $(0,0)$, $(0,\pi)$ et $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\pi\right)$.

Remarque : nous allons étudier ces trois points ainsi que ceux tels que $x=1$. La régularité de f montre qu'il suffit d'étudier ces points pour déterminer les extremums éventuels de f.

b) On calcule : $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\pi\right) = \frac{3}{4}+\frac{1}{2} = \frac{5}{4}$. $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\pi\right) - f(x,y) = \frac{5}{4} - x^2 + \sqrt{1-x^2}\cos(y) \geq \frac{5}{4} - x^2 - \sqrt{1-x^2}$.

Or $\frac{5}{4} - x^2 - \sqrt{1-x^2} = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{1-x^2}\right)^2 \geq 0$. Donc pour tout $(x,y) \in [-1,1] \times \mathbb{R}$, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\pi\right) - f(x,y) \geq 0$: f présente en $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\pi\right)$ un maximum global égal à $\frac{5}{4}$.

c) On a pour tout $y \in \mathbb{R}$: $f(0,y) - 1 = -\cos(y) - 1 \leq 0$.

On calcule $f(x,\pi) = x^2 + \sqrt{1-x^2} \underset{x \to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

On déduit de ces calculs, avec $f(0,\pi) = 1$, d'une part que $f(0,y) - f(0,\pi)$ est négatif au voisinage de $y=\pi$, d'autre part que $f(x,\pi) - f(0,\pi)$ est positif au voisinage de $x=0$. $(x,y) \mapsto f(x,y) - f(0,\pi)$ change donc de signe au voisinage de $(0,\pi)$: f ne présente pas en $(0,\pi)$ d'extremum local.

d) On a $f(0,0) = -1$, et, pour tout $(x,y) \in [-1,1] \times \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - \sqrt{1-x^2}\cos(y) \geq x^2 - \sqrt{1-x^2}$.

La fonction $\varphi : t \mapsto t - \sqrt{1-t}$ est clairement croissante sur $[0,1]$, donc pour tout $t \in [0,1]$, $t - \sqrt{1-t} \geq -1$, et donc, pour tout $(x,y) \in [-1,1] \times \mathbb{R}$, $f(x,y) \geq f(0,0)$.

f présente donc en $(0,0)$ un minimum global égal à -1.

e) On calcule : $f(1,y_0) = 1$.

Premier cas, $y_0 \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$: Au voisinage de y_0 on a $\cos(y) > 0$, donc au voisinage de $(1,y_0)$ on a :

$x^2 - \sqrt{1-x^2}\cos(y) \leq x^2 \leq 1$. Ce qui montre que f présente en $(1,y_0)$ un maximum local égal à 1.

Deuxième cas, $y_0 \in \left]\frac{\pi}{2},\pi\right]$: On pose $\alpha = -\cos(y_0) > 0$, donc pour y proche de y_0, $-\cos(y) \leq \frac{\alpha}{2} > 0$. On a alors $f(1,y_0) - f(x,y) = 1 - x^2 + \sqrt{1-x^2}\cos(y) = \sqrt{1-x^2}\left(\sqrt{1-x^2} + \cos(y)\right) \leq \sqrt{1-x^2}\left(\sqrt{1-x^2} - \frac{\alpha}{2}\right)$.

Comme pour x suffisamment proche de 1 on a $\sqrt{1-x^2} \leq \frac{\alpha}{2}$, on en déduit qu'au voisinage de $(1,y_0)$, on a $f(1,y_0) - f(x,y) \leq 0$. Ce qui montre que f présente en $(1,y_0)$ un minimum local égal à 1.

Troisième cas : $y_0 = \frac{\pi}{2}$. On pose $u = \sqrt{1-x^2}$ et $v = \cos(y)$, de sorte qu'au voisinage de $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$, u se rapproche de 0^+ et v se rapproche de 0 en changeant de signe.

Au voisinage de $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$, $f\left(1,\frac{\pi}{2}\right) - f(x,y) = u^2 - uv$ est du même signe que $g:[0,1]\times[-1,1] \to \mathbb{R}, (u,v) \mapsto u^2 - uv$ au voisinage de $(0,0)$.

Or pour $t > 0$, $g(t,0) > 0$ et $g(t,2t) < 0$: donc g change de signe au voisinage de $(0,0)$, ce qui montre que f ne présente pas d'extremum local en $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$.