Lycée Lakanal

2024 – 2025

PC

# *Feuille d'exercices*

## *Séries numériques*

### Exercice 1

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ dans chacun des cas suivants :

**α_** $u_n = \dfrac{\sin\left(\ln\left(\sqrt{n}\right)\right)}{n^{\frac{5}{3}}}$.

**β_** $u_n = \left[\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right]$.

**χ_** $u_n = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{4}}\left(\ln n\right)^2}$.

**δ_** $u_n = \left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$.

### Exercice 2

Nature, et le cas échéant somme, de la série $\sum u_n$, dans chacun des cas suivants :

**α_** $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+3)}$.

**β_** $u_n = \ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

**χ_** $u_n = \dfrac{n^3}{n!}$.

**δ_*** $u_n = \arctan\left(\dfrac{1}{1+n+n^2}\right)$.

### Exercice 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.

Montrer que les séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{u_n}{1+u_n}$ ont même nature.

### Exercice 4

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \arccos\left(\dfrac{n-1}{n}\right)$. Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$.

### Exercice 5

Nature de la série de terme général : $\dfrac{(-1)^n}{n^{3/4} + \sin(n)}$.

### Exercice 6

Soit $a$ un réel strictement positif fixé. Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} a^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}$.

### Exercice 7

**1.** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par : $\begin{cases} u_0 \in [0,\pi] \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 - \cos(u_n) \end{cases}$ converge vers $0$.

**2.** Déterminer la nature de la série de terme général $u_n$.

## Exercice 8

Soit $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n \geq 1} u_n$ de terme général $\dfrac{n^\beta}{\alpha(1+\alpha)\ldots\left(1+\alpha^n\right)}$.

## Exercice 9

Soit $\left(u_n\right)_{n \geq 0}$ une suite de réels positifs, de limite nulle.

On note $D$ l'ensemble des réels $\alpha > 0$ tel que la série de terme général $u_n^\alpha$ est convergente.

**a.** Montrer que si $D$ est non vide, alors il existe un réel $s$ tel que : $D = [s, +\infty[$, ou bien $D = ]s, +\infty[$.

**b.** Donner un exemple où $D$ est vide, et un exemple où $D$ est égal à $D = ]0, +\infty[$,

**c.** Donner un exemple où $s > 0$ et $D = ]s, +\infty[$.

**d.** Donner un exemple où $s > 0$ et $D = [s, +\infty[$.

## Exercice 10

**1.** Montrer que pour tout $n$ entier strictement positif : $\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{1}{2\pi}t^2 - t\right)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$.

**2.** Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in ]0, \pi[$ : $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} \cos(nt) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\frac{(2m+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$.

**3.a.** Soit $f$ une application de classe $C^1$ sur $[0, \pi]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que : $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^\pi f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0$.

**b.** Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{\frac{1}{2\pi}t^2 - t}{\sin\frac{t}{2}}$ peut être prolongée en une fonction de classe $C^1$ sur $[0, \pi]$.

**4.** En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

**5.** En déduire enfin $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

## Exercice 11

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

**1.** Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$. *On pourra penser aux sommes de Riemann*.

**2.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

**a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $S_{2n} = a_n$.

**b.** Retrouver alors la somme de la série harmonique alternée $\displaystyle\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

## Exercice 12

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \sum_{k=1}^{n} \ln k$.

**1.** A l'aide d'une intégrale, montrer que $v_n$ est équivalent à $n \ln n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**2.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, prouver l'égalité : $\ln\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}\right) - \ln\left(\sqrt[n]{n!}\right) = \frac{1}{n+1}\left(\ln(n+1) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(k)\right)$.

**3.** Etudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$.

**4.** Montrer que $v_n = n \ln(n) - n + o(n)$.

**5.** Etudier la convergence de la série de terme général $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

## Exercice 13

Soient $(u_n)_{n \geq 1}$, $(v_n)_{n \geq 1}$ les suites définies par : $\forall n \geq 1,\ u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Montrer que les séries $\sum_{n \geq 1} u_n$ et $\sum_{n \geq 1} v_n$ convergent, mais que la série produit de Cauchy de ces deux séries est divergente.

## Exercice 14

A l'aide de produits de Cauchy, calculer : **1.** $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)3^{-n}$. **2.** $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)3^{-n}$.

## Exercice 15

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $b_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k\, a_k$.

Toujours pour $n \in \mathbb{N}^*$, on notera $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ et $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$.

**1.** Déterminer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre $A_n$, $B_n$, et $b_n$.

**2.** Montrer que les séries numériques $\sum_{n \geq 1} a_n$ et $\sum_{n \geq 1} b_n$ sont de même nature. En cas de convergence, comparer leurs sommes.

## Exercice 16

On considère un réel $a$ non nul. Déterminer, en fonction de $a$, la nature de la série de terme général $u_n = a^{\lfloor \ln n \rfloor}$ :

**1.** lorsque $a$ est strictement positif ;

**2.** lorsque $a$ est strictement négatif.

## Exercice 17

**1.** Prouver que la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ converge.

**2.** Calculer sa somme.

## Exercice 18

***Sur la série des restes d'une série convergente***

Soit $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à termes positifs telle que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ .

**1.** Soit $n\in\mathbb{N}$. Exprimer $\sum\limits_{k=0}^{n} R_k - \sum\limits_{k=1}^{n} k\,u_k$ en fonction de $n$ et de $R_n$ .

**2.** Montrer que si la série $\sum\limits_{n\geq 0} R_n$ converge, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} n\,u_n$ converge.

**3.** On suppose que la série $\sum\limits_{n\geq 0} n\,u_n$ converge. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)\,R_n$ ?

**4.** En déduire que les séries $\sum\limits_{n\geq 0} R_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} n\,u_n$ sont de même nature, et, qu'en cas de convergence, elles ont la même somme.

## Exercice 19

On considère, pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'équation $\left(E_n\right):\ \ x\,\mathrm{e}^{nx} = 1$.

**1.** Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, cette équation admet une unique solution réelle $x_n$ .

**2.** Montrer que la suite $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $\ell$ et déterminer cette limite.

**3.** Déterminer la nature des séries numériques $\sum x_n$ et $\sum x_n^{\,2}$ .

**4.** Donner un équivalent simple de $x_n$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

## Exercice 20

On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$., $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\{t\}}{t\,(t+n)}\,\mathrm{d}t$, où $\{t\}$ est la partie fractionnaire de $t$ .

**1.** Montrer que la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie.

**2.** Etudier la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et trouver un équivalent de $u_n$ en $+\infty$ .

## Exercice 21

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, soit $p_n$ le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de $n$ . Déterminer la nature de la série $\sum \left(10 - n^{\frac{1}{p_n}}\right)$.

## Exercice 22

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels strictement positifs.

**1.** On suppose que l'on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ pour tout $n$ assez grand, et que $\sum v_n$ converge. Montrer que $\sum u_n$ converge.

**3.** ***Règle de Raabe – Duhamel***

On suppose qu'il existe un réel $A > 1$ tel que pour tout $n$ assez grand, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 - \frac{A}{n}$. Montrer que $\sum u_n$ converge.

**4.** On suppose que pour tout $n$ assez grand, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 - \frac{1}{n}$. Montrer que la série $\sum u_n$ diverge.

## Exercice 23

***Transformation d'Abel***

Soient $\left(a_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(b_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_n$.

**1.** Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} a_k\, b_k = \sum_{k=0}^{n-1} A_k \left(b_k - b_{k+1}\right) + A_n\, b_n$.

**2.** On suppose que :

- • La suite $\left(A_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
- •• La suite $\left(b_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers $0$.

**a_** Montrer que la série $\sum_{k \geq 0} A_k \left(b_k - b_{k+1}\right)$ converge absolument.

**b_** En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} a_n\, b_n$ converge.

**3.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Etudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n^{\alpha}}$.

## Exercice 24

Soit la suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in \left]-1, 0\right[$ ; $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

**1.** Etudier la fonction $f : x \mapsto x + x^2$. Montrer la stabilité de l'intervalle $\left]-1, 0\right[$ par $f$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left]-1, 0\right[$.

**2.** Montrer que $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et donner sa limite.

**3.** En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} u_n^2$ converge, et exprimer sa somme en fonction de $u_0$.

**4.** Déterminer l'ensemble des réels $x$ pour lesquels $\sum u_n\, x^n$ converge.

**5.** Etudier la série $\sum (-1)^n\, u_n$.

**6.** On pose $a_n = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}$. Montrer que $\left(a_n\right)$ converge vers une limite $\ell$.

**7.** On admet que $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} a_p = \ell$. En déduire un équivalent de $u_n$.

**8.** Démontrer le résultat admis en question **7.**.

## Exercice 25

Trouver un équivalent simple de $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ par deux méthodes différentes.

## Exercice 26

Soient $a > 0$ et $b > 0$ tels que $a + 1 < b$, $u_0 > 0$, et $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite vérifiant $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n + a}{n + b}$.

**1.** Donner un équivalent de $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ en $+\infty$.

**2.** Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = -\infty$, et en déduire que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

**3.** On pose $\alpha = b - a$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = n^{\alpha} u_n$. Montrer que la série $\sum \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ est convergente.

**4.** Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{A}{n^{\alpha}}$. En déduire la nature de la série numérique $\sum u_n$.

**5.** Calculer la somme de cette série à l'aide de $\sum_{n=0}^{N} n\left(u_{n+1} - u_n\right) + b\,u_{n+1} - a\,u_n$.

---

## Exercice 27

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $a_n = H_n - \ln n$.

**1.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.

**2.** Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{\alpha}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et en déduire que la série de terme général $a_{n+1} - a_n$ converge, puis que $\left(a_n\right)$ converge.

**3.** Montrer que $\ln\left(u_n\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \frac{1}{2} a_n + \sum_{k=1}^{n} w_k$, où $w_k$ est le terme général d'une série convergente.

**4.** En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

---

## Exercice 28

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n n^b}$.

---

## Exercice 29

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k)$, et on fixe $\beta \in \mathbb{R}_+^*$.

**1.** Montrer, pour tout entier $n \geq 2$ : $\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k)}{k^{\beta}} = \frac{S_n}{n^{\beta}} + \sum_{k=1}^{n-1} S_k \left(\frac{1}{k^{\beta}} - \frac{1}{(k+1)^{\beta}}\right) - 1$.

**2.** En déduire la convergence de la série numérique $\sum \frac{\cos(n)}{n^{\beta}}$.

---

## Exercice 30

**1.** Etudier la suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée de son premier terme $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, et par la relation de récurrence : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin\left(u_n\right)$.

**2.** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose : $v_n = u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha}$.

Montrer qu'il existe un unique $\alpha$ tel que $\left(v_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ***non nul***.

**3.** En déduire un équivalent de $u_n$ lorsque $n \to +\infty$.