



Exercice 1

Soient $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ un réel et a un réel strictement positif.

On définit deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

- $v_0 = a$, $u_0 = v_0 \cos \theta$;

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \sqrt{v_n u_{n+1}}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = v_{n-1} \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ et $u_n = v_n \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$.

2. Simplifier l'expression de $v_n \times \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$.

3. Déterminer la limite des suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 2

1. Etudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée de son premier terme

$u_0 \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$, et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose : $v_n = u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$.

Montrer qu'il existe un unique α tel que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel **non nul**.

3. En déduire un équivalent de u_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 3

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $e^x = n - x$ admet une unique solution réelle positive, que l'on notera x_n .

2. Donner les trois premiers termes du développement asymptotique de x_n .

Exercice 4

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$.

1. Montrer que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2n}$.

2. Sans calculatrice, montrer que $45 < x_{1000} < 45,1$. Rq : $45^2 = 2025$ et

$$45,1 = 2025 + 9 + \frac{1}{100}.$$

Exercice 5

Soient $A \in \mathbb{R}_+^*$, et f une application définie, continue sur l'intervalle ouvert

$I =]-A, A[$, à valeurs dans \mathbb{R} . On pose $J = I \cap \mathbb{R}_+^*$, et l'on suppose que :

- $\forall x \in J$, $0 < f(x) < x$.

- f admet en 0 un développement limité de la forme :

$$f(x) =_0 x - a x^k + o(x^k),$$

où $a \in \mathbb{R}_+^*$ et k est un entier strictement supérieur à 1. Soit enfin $u_0 \in J$.

1. Montrer que l'on définit bien une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la donnée de son premier terme u_0 et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

Prouver la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et déterminer sa limite.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\beta \in \mathbb{R}$, on pose : $v_n = u_{n+1}^\beta - u_n^\beta$.

Montrer qu'il existe un unique $\beta \in \mathbb{R}$ tel que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel

non nul. En déduire alors que $u_n \sim ((k-1)an)^{\frac{1}{1-k}}$.

3. On pose $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de u_n .

Exercice 6

Soit f continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . Soit $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que pour tout $k \in]0, n[$, $\int_0^1 t^k f(t) dt = 0$.

Montrer que f admet au moins $n + 1$ zéros distincts dans $]0, 1[$.

Exercice 7

Soit $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ une application continue, n'admettant qu'un nombre fini de zéros distincts, vérifiant $f(1) \neq 0$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_0^1 e^{nt} f(t) dt \right| = +\infty.$$

Exercice 8

Soit $f \in C^2([a, b], \mathbb{R}) \cap D^3(]a, b[, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2} (f'(a) + f'(b)) - \frac{(b-a)^3}{12} f'''(c).$$

Hint : Utiliser une fonction auxiliaire de la forme

$$x \mapsto f(x) - f(a) - (x-a) \frac{f'(a) + f'(x)}{2} + \frac{(x-a)^3}{12} A$$

où A est une constante judicieusement choisie.

Exercice 9

Soit $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ une application telle que $f(0) = f(1)$.

1. Montrer que l'équation $f\left(x + \frac{1}{2}\right) = f(x)$ possède une solution

dans $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

2. Plus généralement, montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation

$f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x)$ possède une solution dans $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$.

3. Soit $\lambda \in]0, 1[$ tel que $\frac{1}{\lambda} \notin \mathbb{N}^*$. Soit

$$f : \begin{cases} [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin^2\left(\frac{\pi x}{\lambda}\right) - x \sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda}\right) \end{cases}.$$

Pour tout réel $x \in [0, 1 - \lambda]$, calculer

$f(x + \lambda) - f(x)$. Conclusion ?

Exercice 10

Une inégalité de Kolmogorov

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que f et f'' sont bornées sur \mathbb{R} , non identiquement nulles.

On note alors : $\forall k \in \{0, 2\}$, $M_k = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|$ (M_0 et M_2

sont donc des réels tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq M_0$, et

$|f''(x)| \leq M_2$).

1. Soit $h \in \mathbb{R}^{+*}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, appliquer à la fonction f la formule de

Taylor – Lagrange à l'ordre 2 entre x et $x + h$.

2. En déduire que f' est bornée sur \mathbb{R} , et que, si l'on note

$M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)|$, on a :

$$M_1 \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$

2. Étudier sur \mathbb{R}^{+*} la fonction $h \mapsto \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$; en déduire

que $M_1 \leq 2\sqrt{M_0M_2}$.

Exercice 11

Une preuve de la formule de Taylor – Lagrange

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle réel non trivial,

$f \in C^n(I, \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^{n+1}(I, \mathbb{R})$, et $(a, b) \in I^2$ tels que $a < b$.

Soit φ l'application définie sur $[a, b]$ par : $\forall x \in [a, b]$,

$$\varphi(x) = f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (b-x)^k - K \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ où}$$

$K \in \mathbb{R}$.

0. Justifier que $\varphi \in C^0([a, b], \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^1(]a, b[, \mathbb{R})$.

1. Calculer $\varphi(b)$. Montrer qu'il existe un unique $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$\varphi(a) = 0.$$

On choisit désormais cette valeur de K .

2. Montrer que :

$$\forall x \in]a, b[, \varphi'(x) = \left[K - f^{(n+1)}(x) \right] \frac{(b-x)^n}{n!}.$$

3. Montrer alors que :

$$\begin{aligned} \exists c \in]a, b[/ f(b) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \\ &+ \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c). \end{aligned}$$

Exercice 12

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2 , telle que $f(a) = f(b) = 0$ (avec $a < b$).

Soit $x_0 \in]a, b[$.

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(x_0) = \frac{(x_0 - a)(b - x_0)}{2} f''(c).$$

On pourra considérer une fonction de la forme

$$t \mapsto f(t) + \frac{(t - a)(b - t)}{2} K, \text{ où } K \text{ est une constante réelle}$$

judicieusement choisie.

Exercice 13

Soient deux réels a et b tels que $a < b$.

Soit f une fonction de classe C^2 sur $[a, b]$, deux fois dérivable sur $]a, b[$.

On suppose que $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$.

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = f''(c)$.

Utiliser une fonction adaptée, faisant intervenir la fonction exponentielle...

Exercice 14

Soit f une application de classe C^∞ sur \mathbb{R} , soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. On

suppose que :

$$f^{(n+1)}(0) = f^{(n+2)}(0) = \dots = f^{(n+p-1)}(0) = 0, \text{ et}$$

$$f^{(n+p)}(0) > 0.$$

1. Montrer qu'il existe un intervalle $[0, a]$ sur lequel $f^{(n+p-1)}$ est injective.

2. Plus généralement, montrer que, pour tout $k \in \{0, n + p - 1\}$, il existe un intervalle $[0, a]$ sur lequel $f^{(n+k)}$ est injective.

En particulier, il existe un intervalle $[0, a]$ sur lequel $f^{(n)}$ est injective.

Pour x appartenant à cet intervalle, on écrit la formule de Taylor – Lagrange à l'ordre $n - 1$ entre 0

et x pour f .

L'injectivité de $f^{(n)}$ permet de remplacer le traditionnel

« $\exists c \in]0, x[$ » par un « $\exists ! c(x) \in]0, x[$ ».

3.a. Écrire la formule de Taylor – Lagrange à l'ordre $n - 1$ entre 0 et x pour f , à l'ordre

$n + p - 1$ entre 0 et x pour f , et à l'ordre $p - 1$ entre 0 et

$c(x)$ pour $f^{(n)}$.

b. En déduire que : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{c(x)} = \sqrt[p]{\binom{n+p}{p}}$.