Lycée Lakanal

2024- 2025

Colles MP

Semaine 5 – 30/09/2024

Calcul différentiel

Exercice 1

Pour tout réel a différent de 0 et de $-\dfrac{1}{2}$, on définit la fonction f_a de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f_a(x, y) = \left(1 + y + xy + ax^2\right)\mathrm{e}^{y}.$$

1.a. Calculer les dérivées partielles premières de f_a.

b. En déduire que f_a possède deux points critiques, et donner leurs coordonnées.

3.a Examiner, pour chacun des deux points critiques, à quelle condition portant sur a, f_a présente en ce point un extremum local.

b. Déterminer, en distinguant trois cas, si f_a présente sur $\mathbb{R}^2$ un maximum global ou un minimum global, et donner sa valeur en fonction de a.

Exercice 2

Une application f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est dite ***positivement homogène de degré*** $\boldsymbol{\alpha}$ sur $\mathbb{R}^n$ ssi :

$$\forall\ \left(x_1, \dots, x_n\right) \in \mathbb{R}^n,\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ f\left(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n\right) = \lambda^{\alpha} f\left(x_1, \dots, x_n\right).$$

Q1_ Donner des exemples d'applications positivement homogènes de degrés -2, et 1.

Q2_ Que peut-on dire d'une application positivement homogène de degré 0 ?

Q3_ Soit $f \in C^1\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}\right)$. Montrer que si f est positivement homogène de degré α sur $\mathbb{R}^n$, alors ses dérivées partielles sont positivement homogènes de degré $\alpha - 1$.

Q4_ Soit $f \in C^1\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}\right)$. Montrer que f est positivement homogène de degré α sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si elle vérifie l'***équation d'Euler*** :

$$\forall\ \left(x_1, \dots, x_n\right) \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k}\left(x_1, \dots, x_n\right) = \alpha f\left(x_1, \dots, x_n\right).$$

On pourra introduire l'application $\varphi : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \varphi(t) = f\left(t x_1, \dots, t x_n\right) \end{array}\right)$.

B

A l'aide de **A**, on souhaite déterminer toutes les applications $f \in C^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ telles que :

$$\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}\ . \quad (\ast)$$

Q5_ Déterminer une solution positivement homogène f_0.

Q6_ Montrer que f est solution de $(\ast)$ si et seulement si $g = f - f_0$ vérifie :

$$\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Q7_ Montrer alors que g est nécessairement constante, et conclure.

Exercice 3

Résoudre sur $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$:

1. $x\dfrac{\partial f}{\partial x} - y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$; **2.** $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Exercice 4

Soit $f : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & -2(x-y)^2 + x^4 + y^4 \end{array}\right)$.

Déterminer les extrema (*locaux, puis globaux*) de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5

Soit $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$.

Soit $f : M \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^3 - 3x\left(1 + y^2\right)$.

1. Déterminer les points critiques de f.

2.a. Montrer que f admet sur D un minimum m et un maximum M, et qu'ils sont atteints sur $C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 = 1 \right\}$.

b. Etudier la fonction $t \mapsto f(\cos t, \sin t)$. En déduire M et m.

Exercice 6

Soient a et b deux réels strictement positifs.

On considère l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x\, y\, e^{-\frac{x}{a} - \frac{y}{b}} \end{cases}$

1. Montrer que f admet exactement deux points critiques, que l'on déterminera.

2. Montrer que le plus simple de ces deux points n'est pas extremum local.

3. Montrer que f n'admet ni maximum, ni minimum global.

4. On cherche ici à démontrer que f admet un maximum sur $\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2$.

a. Soit α un réel strictement positif.

Montrer que pour tout $x > 0$: $x \alpha\, e^{-\frac{x}{a} - \frac{\alpha}{b}} \leq a \alpha\, e^{-1 - \frac{\alpha}{b}}$.

b. Montrer que pour tout $\alpha > 0$: $a \alpha\, e^{-1 - \frac{\alpha}{b}} \leq a\, b\, x\, e^{-2}$.

c. Conclure.

Exercice 7

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} - 1 \end{cases}$.

1. Vérifier la continuité de f. Sur quel domaine admet –elle des dérivées partielles ?

2. Déterminer les extrema des f sur $\left\{ (x, y), \ \sqrt{x^2 + y^2} \leq 9 \right\}$.

Exercice 8

Déterminer les extrema de $f : (x, y) \mapsto x\, y \ln\left(x^2 + y^2\right)$.

Exercice 9

On considère l'équation aux dérivées partielles

$$(E) : \qquad f \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial y}$$

1. Soit $f \in C^2\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ solution de (E) ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}^2$.

Montrer qu'il existe $a \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que : $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = a(x)\, f(x, y)$, puis qu'il existe deux fonctions

$g, h \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que : $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$f(x, y) = g(x)\, h(y)$.

2. Soit $f : (x, y) \mapsto x^3 y^3 + |x y|^3$. Montrer que $f \in C^2\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$, et que f est solution de (E) sur $\mathbb{R}^2$.

Montrer qu'il n'existe pas de fonctions $g, h \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ f(x, y) = g(x)\, h(y).$$

Exercice 10

1) Soit $g : \mathbb{R}_-^* \longrightarrow \mathbb{R}, x \longrightarrow x\exp(\frac{1}{x}) + \exp(x)$. Montrer que g est croissante et calculer $g(-1)$.
2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x,y) \longrightarrow x\exp(y) + y\exp(x)$. Montrer que si (x_0, y_0) est un point critique, alors $x_0 < 0$ *et* $x_0 y_0 = 1$ *et* $g(x_0) = 0$. Déterminer le(s) point(s) critique(s).
3) Soit $x \longrightarrow f(-1+ax, -1+x)$ où $a \in \mathbb{R}$. Donner un développement limité en 0 à l'ordre 2.
4) Montrer que f n'admet pas d'extremum local.
5) Notons $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \mid x \mid \leq 1 \text{ et } \mid y \mid \leq 1\}$. Déterminer le minimum et le maximum de f sur D en justifiant leur existence.

Exercice 11

Soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ harmonique c'est-à-dire g est de classe C^2 et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$. 1) Trouver a, b des réels tels que $\dfrac{1}{1-t^2} = \dfrac{a}{1+t} + \dfrac{b}{1-t}$.

2) Résoudre l'équation différentielle $(1-t^2)y'' - 2ty' = 0$.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable deux fois et $F = fog$.

3) Exprimer $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

4) On suppose que f'' ne s'annule pas. Montrer que F est harmonique ssi g est une constante.

Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable deux fois et $G(x,y) = h(\dfrac{\cos(x)}{\text{ch}(y)})$.

5) Déterminer les applications h telles que G soit harmonique.

Exercice 12

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{x^3 y}{x^2 + y^4}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2) La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 13

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x,y) = \text{ch}(2x) - \cos(2y)$.

On considère les ensembles $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $D' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x^2 + y^2 < 1\}$.

1. Pour tout t positif, montrer les inégalités $\sin(t) \leq t$ et $\text{sh}(t) \geq t$.

2. Montrer que f admet un minimum nul sur $\mathbb{R}^2$.

3. Montrer que D est fermé et borné. En déduire que f admet un maximum sur D.

4. Montrer que D' est un ouvert et déterminer les points critiques de f dans D'.

5. En déduire qu'il existe $t_0 \in [0, \pi/2]$ tel que le maximum de f sur D soit égal à $f(\cos(t_0), \sin(t_0))$.

6. Étudier les variations sur $[0, \pi/2]$ de la fonction $g : \theta \mapsto f(\cos(\theta), \sin(\theta))$. Conclure.

Exercice 14

(CCP 2003,2005) Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 0\}$ et $B = \{(t,z) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\}$. Soit φ définie sur B à valeurs dans A par $\varphi(t,z) = (t + tz, t - tz)$.

a) Montrer que φ est une bijection de B sur A.

b) Montrer que φ et φ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$.

c) Déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$, de A dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\frac{2x}{x+y}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{2y}{x+y}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \frac{2f(x,y)}{x+y+2} = (x+y+2)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Exercice 15

(Mines 2001) trouver le maximum et le minimum de $f(x,y,z) = xy + yz + zx$ sur $\Delta = \{(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+)^3 \mid x + y + z = 1\}$.