



# Programme de colles S6 (calcul différentiel, séries numériques)

2024- 2025

Semaine du 07 – 10 au 11 – 10

## Calcul différentiel

Les applications considérées sont définies sur un domaine de  $\mathbb{R}^p$ , à valeurs réelles.

### I Applications de classe $C^1$ à valeurs réelles

#### 1. Limites, continuité

Limites ; Propriétés des limites. Continuité : définition, caractérisation séquentielle, continuité et opérations. Applications partielles.

#### 2. Dérivées directionnelles, dérivées partielles

Dérivée directionnelle suivant un vecteur unitaire.

Dérivées partielles d'ordre 1 ; applications de classe  $C^1$ . Développement limité à l'ordre 1 d'une application de classe  $C^1$ .

Corollaire :  $C^1 \Rightarrow$  continue. Différentielle d'une fonction en un point, puis différentielle d'une fonction  $C^1$ .

Gradient ; expression dans la base canonique de la différentielle en termes de gradient. Opérations.

Les applications  $C^1$  sur un ouvert convexe dont le gradient est nul sont les applications constantes.

#### 3. Composition : règle de la chaîne

Exemple : passage en coordonnées polaires.

Nombreuses applications à des équations aux dérivées partielles.

### II Dérivées partielles d'ordre 2

Définition. Applications de classe  $C^2$ . Théorème d'interversion de Schwarz.

Hessienne. Développement limité à l'ordre 2 d'une application de classe  $C^2$ .

### III Extrema d'une fonction de plusieurs variables

Définitions ; théorèmes d'existence pour une application continue sur un fermé borné. Sur un ouvert, condition nécessaire d'extrémalité à l'ordre 1 des applications de classe  $C^1$ .

Condition nécessaire d'extrémalité à l'ordre 2 d'une application de classe  $C^2$  : si la Hessienne en un point critique est définie positive (resp. définie négative), l'application présente en ce point un minimum (resp. maximum) local. Si elle n'est ni positive ni négative, c'est un point col. Aucune notion de réduction n'est connue, sur des exemples, le signe de  $h^T H_f(a) h$  a été étudié grâce à des mises sous formes canoniques successives.

## Séries numériques

- Définitions** : série numérique ; sommes partielles d'une série ; nature, somme d'une série.
- Premières propriétés** : linéarité ; invariance de nature par troncature, convergence des séries complexes.
- Liens entre restes, sommes partielles, et terme général d'une série convergente**

### II. Premiers critères de convergence

#### 1. Le théorème de convergence par majoration pour les séries à terme général positif

Version majoration de la suite des sommes partielles, version majoration du terme général ; versions  $o$ ,  $O$ ,  $\sim$ .

#### 2. Divergence grossière ; convergence absolue

Notion de séries semi - convergentes. La suite  $(u_n)$  est dite sommable lorsque la série  $\sum u_n$  converge absolument.

**III. Séries usuelles** : séries géométriques, géométriques dérivées première et seconde, exponentielles ; séries de Riemann

#### IV. D'autres critères de convergence

##### 1. Comparaison série / intégrale

###### a. Premières notions sur les intégrales généralisées

Nature de  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ ,  $f$  étant continue par morceaux sur  $[a, +\infty[$ . Les propriétés nécessaires à l'établissement des résultats qui suivent ont été données, mais l'étude des intégrales généralisées sera l'objet d'un chapitre ultérieur.

###### b. Théorème de comparaison série/intégrale

Si  $f$  est continue par morceaux, décroissante et positive sur un voisinage  $[a, +\infty[$  de  $+\infty$ , la série  $\sum_{n \geq n_0} f(n)$  et

l'intégrale  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  sont de même nature. Equivalents des sommes partielles en cas de divergence, encadrement du reste

en cas de convergence. On doit pouvoir traiter le cas des séries de Bertrand.

[La version (avec les mêmes hypothèses) : la série de terme général  $f(n) - \int_n^{n+1} f(t) dt$  converge, a été brièvement explorée].

##### 2. Comparaison à des séries usuelles

a. Comparaison à une série géométrique : règle de d'Alembert.

b. Comparaison à une série de Riemann : règle du " $n^\alpha u_n$ "

##### 3. Théorème spécial des séries alternées

+ Encadrement de la somme, signe du reste et majoration de sa valeur absolue.

#### V. Produits de Cauchy ; formule de Stirling (preuves non exigibles, et même non donnée pour les produits de Cauchy)

On peut donner des exercices impliquant des transformations d'Abel, ça a été vu. Mais tout résultat concernant celles-ci est hors programme.

#### Questions de cours fléchées (exemples d'énoncés exigibles avec preuve, sauf le dernier) :

L'un ou l'autre des théorèmes de convergence par majoration pour les séries à terme général positif.

La convergence absolue entraîne la convergence.

Théorème spécial des séries alternées.

Théorème de comparaison série/intégrale.

Nature des séries de Bertrand (surtout celles du type  $\frac{1}{n \ln^\beta n}$ ).

Nature des séries de Riemann.

Séries exponentielles (surtout le cas réel).

Règle de d'Alembert.

Enoncé précis du résultat concernant les produits de Cauchy.

### Prévisions pour la semaine suivante

Séries numériques ; un peu de suites et de séries de fonctions