Lycée Lakanal

2024- 2025

Colles PC

Semaine 6 – 07/10/2024

Calcul différentiel ; séries numériques

Exercice 1

Pour tout réel a différent de 0 et de $-\frac{1}{2}$, on définit la fonction f_a de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f_a(x,y)=\left(1+y+xy+ax^2\right)\mathrm{e}^{y}.$$

1.a. Calculer les dérivées partielles premières de f_a .

b. En déduire que f_a possède deux points critiques, et donner leurs coordonnées.

3.a Examiner, pour chacun des deux points critiques, à quelle condition portant sur a , f_a présente en ce point un extremum local.

b. Déterminer, en distinguant trois cas, si f_a présente sur $\mathbb{R}^2$ un maximum global ou un minimum global, et donner sa valeur en fonction de a .

Exercice 2

Une application f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est dite ***positivement homogène de degré*** $\boldsymbol{\alpha}$ sur $\mathbb{R}^n$ ssi :

$$\forall\left(x_1,\dots,x_n\right)\in\mathbb{R}^n,\ \forall\,\lambda\in\mathbb{R}_+^*,\ f\left(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n\right)=\lambda^{\alpha} f\left(x_1,\dots,x_n\right).$$

Q1_ Donner des exemples d'applications positivement homogènes de degrés -2 , et 1.

Q2_ Que peut-on dire d'une application positivement homogène de degré 0 ?

Q3_ Soit $f\in C^1\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}\right)$. Montrer que si f est positivement homogène de degré α sur $\mathbb{R}^n$, alors ses dérivées partielles sont positivement homogènes de degré $\alpha-1$.

Q4_ Soit $f\in C^1\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}\right)$. Montrer que f est positivement homogène de degré α sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si elle vérifie l'***équation d'Euler*** :

$$\forall\left(x_1,\dots,x_n\right)\in\mathbb{R}^n,\ \sum_{k=1}^{n} x_k\cdot\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(x_1,\dots,x_n\right)=\alpha f\left(x_1,\dots,x_n\right).$$

On pourra introduire l'application φ : $\left(\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}\\ t & \mapsto & \varphi(t)=f\left(tx_1,\dots,tx_n\right)\end{array}\right)$.

B

A l'aide de **A**, on souhaite déterminer toutes les applications $f\in C^1\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\right)$ telles que :

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\sqrt{x^4+y^4}\ .\quad(\ast)$$

Q5_ Déterminer une solution positivement homogène f_0.

Q6_ Montrer que f est solution de $(\ast)$ si et seulement si $g=f-f_0$ vérifie :

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=0.$$

Q7_ Montrer alors que g est nécessairement constante, et conclure.

Exercice 3

Résoudre sur $U=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$:

1. $x\dfrac{\partial f}{\partial x}-y\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$; **2.** $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

Exercice 4

Soit f : $\left(\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}\\ (x,y) & \mapsto & -2(x-y)^2+x^4+y^4\end{array}\right)$.

Déterminer les extrema (*locaux, puis globaux*) de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5

Soit $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$.

Soit $f : M \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^3 - 3x\left(1 + y^2\right)$.

1. Déterminer les points critiques de f.

2.a. Montrer que f admet sur D un minimum m et un maximum M, et qu'ils sont atteints sur $C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 = 1 \right\}$.

b. Etudier la fonction $t \mapsto f(\cos t, \sin t)$. En déduire M et m.

Exercice 6

Soient a et b deux réels strictement positifs.

On considère l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x\, y\, e^{-\frac{x}{a} - \frac{y}{b}} \end{cases}$

1. Montrer que f admet exactement deux points critiques, que l'on déterminera.

2. Montrer que le plus simple de ces deux points n'est pas extremum local.

3. Montrer que f n'admet ni maximum, ni minimum global.

4. On cherche ici à démontrer que f admet un maximum sur $\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2$.

a. Soit α un réel strictement positif.

Montrer que pour tout $x > 0$: $x \alpha e^{-\frac{x}{a} - \frac{\alpha}{b}} \leq a \alpha e^{-1 - \frac{\alpha}{b}}$.

b. Montrer que pour tout $\alpha > 0$: $a \alpha e^{-1 - \frac{\alpha}{b}} \leq a\, b\, x\, e^{-2}$.

c. Conclure.

Exercice 7

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} - 1 \end{cases}$.

1. Vérifier la continuité de f. Sur quel domaine admet –elle des dérivées partielles ?

2. Déterminer les extrema des f sur $\left\{ (x, y),\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq 9 \right\}$.

Exercice 8

Déterminer les extrema de $f : (x, y) \mapsto x\, y \ln\left(x^2 + y^2\right)$.

Exercice 9

On considère l'équation aux dérivées partielles

$$(E) : \qquad f \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial y}$$

1. Soit $f \in C^2\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ solution de (E) ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}^2$.

Montrer qu'il existe $a \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = a(x) f(x, y)$, puis qu'il existe deux fonctions

$g, h \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$f(x, y) = g(x) h(y)$.

2. Soit $f : (x, y) \mapsto x^3 y^3 + |x y|^3$. Montrer que $f \in C^2\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$, et que f est solution de (E) sur $\mathbb{R}^2$.

Montrer qu'il n'existe pas de fonctions $g, h \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = g(x) h(y).$$

Exercice 10

1) Soit $g : \mathbb{R}_-^* \longrightarrow \mathbb{R}, x \longrightarrow x\exp(\frac{1}{x}) + \exp(x)$. Montrer que g est croissante et calculer $g(-1)$.
2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longrightarrow x\exp(y) + y\exp(x)$. Montrer que si (x_0, y_0) est un point critique, alors $x_0 < 0$ *et* $x_0y_0 = 1$ *et* $g(x_0) = 0$. Déterminer le(s) point(s) critique(s).
3) Soit $x \longrightarrow f(-1 + ax, -1 + x)$ où $a \in \mathbb{R}$. Donner un développement limité en 0 à l'ordre 2.
4) Montrer que f n'admet pas d'extremum local.
5) Notons $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/ \mid x \mid \leq 1 \text{ et } \mid y \mid \leq 1\}$. Déterminer le minimum et le maximum de f sur D en justifiant leur existence.

Exercice 11

Soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ harmonique c'est-à-dire g est de classe C^2 et $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$. 1) Trouver a, b des réels tels que $\frac{1}{1-t^2} = \frac{a}{1+t} + \frac{b}{1-t}$.

2) Résoudre l'équation différentielle $(1 - t^2)y'' - 2ty' = 0$.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable deux fois et $F = fog$.

3) Exprimer $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

4) On suppose que f'' ne s'annule pas. Montrer que F est harmonique ssi g est une constante.

Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable deux fois et $G(x, y) = h(\frac{\cos(x)}{\operatorname{ch}(y)})$.

5) Déterminer les applications h telles que G soit harmonique.

Exercice 12

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^2 + y^4}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
2) La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 13

Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $f(x,y)=\operatorname{ch}(2x)-\cos(2y)$.

On considère les ensembles $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\,x^2+y^2\leq 1\}$ et $D'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\,x^2+y^2<1\}$.

1. Pour tout t positif, montrer les inégalités $\sin(t)\leq t$ et $\operatorname{sh}(t)\geq t$.
2. Montrer que f admet un minimum nul sur $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que D est fermé et borné. En déduire que f admet un maximum sur D.
4. Montrer que D' est un ouvert et déterminer les points critiques de f dans D'.
5. En déduire qu'il existe $t_0\in[0,\pi/2]$ tel que le maximum de f sur D soit égal à $f(\cos(t_0),\sin(t_0))$.
6. Étudier les variations sur $[0,\pi/2]$ de la fonction $g:\theta\mapsto f(\cos(\theta),\sin(\theta))$. Conclure.

Exercice 14

(CCP 2003,2005) Soit $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x+y>0\}$ et $B=\{(t,z)\in\mathbb{R}^2\mid t>0\}$. Soit φ définie sur B à valeurs dans A par $\varphi(t,z)=(t+tz,t-tz)$.

a) Montrer que φ est une bijection de B sur A.

b) Montrer que φ et φ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$.

c) Déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$, de A dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\frac{2x}{x+y}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\frac{2y}{x+y}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)+\frac{2f(x,y)}{x+y+2}=(x+y+2)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Exercice 15

(Mines 2001) trouver le maximum et le minimum de $f(x,y,z)=xy+yz+zx$ sur $\Delta=\{(x,y,z)\in(\mathbb{R}_+)^3\mid x+y+z=1\}$.

Exercice 16

Soient $A\in\mathbb{R}_+^*$, et f une application définie, continue sur l'intervalle ouvert $I=]-A,A[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose $J=I\cap\mathbb{R}_+^*$, et l'on suppose que :

- • $\forall x\in J,\ 0<f(x)<x$.
- •• f admet en 0 un développement limité de la forme :

$$f(x)\underset{0}{=}x-ax^k+o\left(x^k\right),$$

où $a\in\mathbb{R}_+^*$ et k est un entier strictement supérieur à 1. Soit enfin $u_0\in J$.

1. Montrer que l'on définit bien une suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de son premier terme u_0 et par la relation de récurrence :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f\left(u_n\right).$$

Prouver la convergence de la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, et déterminer sa limite.

2. Pour $n\in\mathbb{N}$ et $\beta\in\mathbb{R}$, on pose : $v_n=u_{n+1}^\beta-u_n^\beta$.

Montrer qu'il existe un unique $\beta\in\mathbb{R}$ tel que la suite $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ***non nul***. En déduire alors que $u_n\sim\left((k-1)an\right)^{\frac{1}{1-k}}$.

3. On pose $u_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\sin\left(u_n\right)$. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Exercice 17

1. Pour quelles valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ la série de terme général

$$\ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$$

est – elle convergente ?

2. Calculer alors la somme de cette série.

Exercice 18

Pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on pose $u_n = \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{k=2}^{n} (\ln k)^2}$.

1. Déterminer un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

2. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 2} u_n$.

Exercice 19

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$b_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k\, a_k \quad .$$

Toujours pour $n \in \mathbb{N}^*$, on notera $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ et $B_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k$.

1. Déterminer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre A_n , B_n , b_n .

2. Montrer que les séries numériques $\displaystyle\sum_{n \geq 1} a_n$ et $\displaystyle\sum_{n \geq 1} b_n$ sont de même nature.

En cas de convergence, comparer leurs sommes.

Exercice20

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son premier terme u_0 strictement positif, et par la relation : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\arctan(u_n)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose également : $v_n = 2^n u_n$.

1. Etudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente.

3. Etudier la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

4. Prouver la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$. On note K sa somme.

5. Déterminer, en fonction de K, un équivalent simple de u_n .

Exercice 21

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels telle que $\displaystyle\sum_{n \geq 1} a_n$ converge, et $a_n \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Montrer que $\displaystyle\sum_{n \geq 1} n(a_n - a_{n+1})$ converge, et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Exercice 22

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes réels positifs ou nuls. On pose pour tout

$n \in \mathbb{N}^* :\ v_n = \dfrac{u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{2n-1}}{n}$.

Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature :

1. lorsque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante ;

2. dans le cas général.

Exercice 23

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes positifs divergente. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = \frac{u_n}{(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_n)}.$$

Nature et somme de la série numérique $\sum_{n\geq 0} v_n$.

Exercice 24

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall n\in\mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \sqrt{x_n^2 + u_n}\right)$. Montrer que la série $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 25

Soit $\alpha > 0$. Déterminer la nature de la série de terme général $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha + (n-k)^\alpha}$.

Exercice 26

On considère la série numérique $\left(\sum \frac{1}{n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Donner un encadrement du reste d'ordre n de cette série, puis un équivalent simple de ce reste.

Exercice 27

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite décroissante de nombres réels positifs ou nuls. En considérant des sommes du type $\sum_{k=1}^{10^n} u_k$ et $\sum_{k=10^n+1}^{10^{n+1}} u_k$, montrer que les séries $\sum_{k\geq 1} u_k$ et $\sum_{k\geq 0} 10^k u_{10^k}$ sont de même nature.

2. ***Application***

Retrouver, suivant la valeur du réel $\alpha > 0$, la nature des séries $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ puis $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$.

3.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \begin{cases} 0 & \text{si l'écriture décimale de } n \text{ comporte le chiffre } 9 \\ \frac{1}{n} & \text{sinon} \end{cases}$.

Déterminer la nature de la série $\sum_{k\geq 1} u_k$.

Exercice 28

Soit $x \in]0,1[$. Convergence et somme de la série de terme général

$$x^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!\,x^k}.$$

Exercice 29

On définit $(u_n)_{n\geq 0}$ par : $u_0 = 5$, et : $\forall\ n \geq 0,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

1. Etudier la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

2. Montrer que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} \geq \sqrt{2n}$.

3. Montrer que $45 \leq u_{1000} \leq 45{,}1$.

Exercice 30

Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ injective.

1. Soit $a < b$ dans $\mathbb{N}^*$ tel que $f(a) > f(b)$. Montrer que

$$\frac{f(a)}{a^2} + \frac{f(b)}{b^2} > \frac{f(b)}{a^2} + \frac{f(a)}{b^2}.$$

2. Nature de la série de terme général $\dfrac{f(n)}{n^2}$.

Exercice 31

Etudier les séries de termes généraux :

$$u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^\alpha} \text{ et } v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n} + (-1)^n}.$$

Exercice 32

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right), \text{avec } \alpha > 1.$$

a. Soient $\beta \in \left]1, \alpha\right[$ et $(v_n) = \dfrac{1}{n^\beta}$. Donner un développement asymptotique de $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

b. Comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. En déduire la nature de $\sum u_n$ (*règle de Raabe – Duhamel*).

c. Soit (w_n) telle que $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{n+a}{n+b}$, avec $a, b, w_0 > 0$.

***i* –** Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $\sum w_n$ converge.

***ii* –** Etudier la suite $\left((n+b-1)w_n\right)$ lorsque $b > a+1$. On s'intéressera à $a_{n+1} - a_n$, avec $a_n = \ln\left((n+b-1)w_n\right)$.

***iii* –** Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n$ en cas de convergence.

Exercice 33

On pose lorsque cela a un sens :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin^3(nx)}{n!}.$$

Domaine de définition et calcul de S.

Exercice 34

Soient $a \in \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{2k+1} - a\ln(n)$.

a. Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $u_{n+1} - u_n$.

b. Pour quelles valeurs de a la suite (u_n) est – elle convergente ?

Exercice 35

a. Limite ℓ de la suite de terme général $u_n = \cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$.

b. Nature de la série de terme général $u_n - \ell$.

Exercice 36

Étudier la série de terme général $\sin\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right)$.