Lycée Lakanal

2024 – 2025

PC

Feuille d'exercices séries numériques

Quelques corrigés (2)

Exercice 1

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ dans chacun des cas suivants :

α_ $u_n = \dfrac{\sin\left(\ln\left(\sqrt{n}\right)\right)}{n^{\frac{5}{3}}}$.

β_ $u_n = \left[\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n - \dfrac{1}{e}\right]$.

χ_ $u_n = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{4}}\left(\ln n\right)^2}$.

δ_ $u_n = \left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$.

α_ $\left|u_n\right| \leq \dfrac{1}{n^{\frac{5}{3}}}$. D'après le critère de Riemann, la série $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

β_ On a $u_n = \exp\left(n\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right) - \dfrac{1}{e}$, d'où : $u_n = \exp\left(n\left(-\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)\right) - \dfrac{1}{e}$, puis après simplification : $u_n = \exp\left(-1 - \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) - \dfrac{1}{e} = e^{-1}\left[\exp\left(-\dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) - 1\right]$.

On en déduit que $u_n = \exp\left(-1 - \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) - \dfrac{1}{e} = e^{-1}\left[1 - \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1\right]$, d'où : $u_n \sim \dfrac{e^{-1}}{2}\dfrac{1}{n}$.

D'après le critère de Riemann, la série $\sum u_n$ est donc divergente.

χ_ $\sum\limits_{n \geq 2} u_n$ est à terme général positif. On se doute que cette série diverge ; pour le prouver, on compare u_n au terme général d'une série de Riemann divergente, suivant la règle du " $n^\alpha u_n$ " : on cherche donc $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes : $\begin{cases} \lim n^\alpha u_n = +\infty \text{ (pour avoir } \dfrac{1}{n^\alpha} = o\left(u_n\right)\text{)} \\ \alpha \leq 1 \text{ (pour que } \sum \dfrac{1}{n^\alpha} \text{ diverge)} \end{cases}$. On constate que $\alpha = 1$ convient, car on a bien

$\lim n\,u_n = \lim \dfrac{n^{1/4}}{\ln^2(n)} = +\infty$ par croissances comparées.

On récapitule ? la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, $\dfrac{1}{n} = o\left(u_n\right)$ et $\left(u_n\right)$ est à terme général positif. On en conclut que la série $\sum u_n$ est divergente.

δ_ On passe à nouveau sous forme exponentielle :

$$u_n = \exp\left(n\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \exp\left(n\ln\left(-\frac{1}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp\left(-\sqrt{n} + O(1)\right),$$

d'où $u_n = O\left(\exp\left(-\sqrt{n}\right)\right)$.

Par croissances comparées, $X^4 \exp(-X) \underset{X \to +\infty}{\to} 0$. Donc, $n^2 \exp\left(-\sqrt{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\to} 0$.

Il en résulte que $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et ainsi, d'après la règle de Riemann, la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

Exercice 2

Nature, et le cas échéant somme, de la série $\sum u_n$, dans chacun des cas suivants :

α_ $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+3)}$.

β_ $u_n = \ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$.

χ_ $u_n = \dfrac{n^3}{n!}$.

δ_* $u_n = \arctan\left(\dfrac{1}{1+n+n^2}\right)$.

α_ Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+3)}$. On décompose la fraction rationnelle

$\frac{1}{X(X+1)(X+3)}$ en éléments simples, et l'on cherche donc α, β, γ tels que :

$\frac{1}{X(X+1)(X+3)} = \frac{\alpha}{X} + \frac{\beta}{X+1} + \frac{\gamma}{X+3}$. On obtient :

$\frac{1}{X(X+1)(X+3)} = \frac{1/3}{X} - \frac{1/2}{X+1} + \frac{1/6}{X+3}$.

Par suite, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3}\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{6}\frac{1}{k+3} \right)$. Après séparation des sommes, et changements d'indices :

$S_n = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{6}\sum_{k=4}^{n+3} \frac{1}{k}$, soit en notant $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$:

$S_n = \cancel{\frac{1}{3} H_n} - \frac{1}{2}\left(-1 + \cancel{H_n} + \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{6}\left(-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cancel{H_n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right)$, ou encore :

$S_n = \frac{7}{18} + O\left(\frac{1}{n}\right)$. Finalement, $\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{7}{18}$, ce qui revient à dire que la série $\sum u_n$ converge, et que

$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{7}{18}$.

β_ Posons, pour tout $n \geq 2$, $S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k$. On a

$S_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2 - 1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n} \left(\ln(k-1) + \ln(k+1) - 2\ln(k) \right)$. A nouveau, on sépare les sommes, et l'on change d'indice dans les deux premières d'entre elles.

$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \ln k + \sum_{k=3}^{n+1} \ln k - 2\sum_{k=2}^{n} \ln k = \sum_{k=2}^{n-1} \ln k + \sum_{k=3}^{n+1} \ln k - 2\sum_{k=2}^{n} \ln k$,

Et donc : $S_n = \left(\sum_{k=2}^{n} \ln k - \ln(n) \right) + \left(-\ln(2) + \sum_{k=2}^{n} \ln k + \ln(n+1) \right) - 2\sum_{k=2}^{n} \ln k$.

Finalement, $S_n = \left(\sum_{k=2}^{n} \ln k - \ln(n) \right) + \left(-\ln(2) + \sum_{k=2}^{n} \ln k + \ln(n+1) \right) - 2 \sum_{k=2}^{n} \ln k$, soit :

$$S_n = -\ln(2) + \ln\left(\frac{n+1}{n} \right).$$

Par passage à la limite : la série $\sum u_n$ converge, et $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = -\ln(2)$.

χ_ Posons pour tout $n \geq 0$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On a

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k^3}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{k!} && \text{terme d'indice } 1 \text{ nul} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)^2}{k!} && \text{changement d'indice} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k(k-1) + 3k + 1}{k!} && \text{arrangement du numérateur en vue de simplifications ultérieures} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k(k-1)}{k!} + 3 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{k!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \\
&= \sum_{k=2}^{n-1} \frac{k(k-1)}{k!} + 3 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} && \text{supression de termes nuls} \\
&= \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(k-2)!} + 3 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k-1)!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n-3} \frac{1}{k!} + 3 \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}
\end{aligned}$$

La série exponentielle $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!}$ converge, et sa somme vaut e . On en déduit que $\lim S_n = 5\,\mathrm{e}$:

$\sum u_n$ converge, et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 5\,\mathrm{e}$.

δ_ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{(k+1) - k}{1 + k(k+1)} \right)$. La formule $\tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$

donne alors $\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\arctan(k+1) - \arctan(k) \right)$, d'où par télescopage, $\sum_{k=1}^{n} u_k = \arctan(n+1) - \arctan(1)$.

On en déduit que $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$: $\sum u_n$ converge, et $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.

Montrer que les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{1 + u_n}$ ont même nature.

On distingue deux cas :

- Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ne converge pas vers 0, alors $\frac{1}{1 + u_n}$ ne tend pas vers 1. Donc, en remarquant que

$\dfrac{u_n}{1+u_n} = 1 - \dfrac{1}{1+u_n}$, la suite $\left(\dfrac{u_n}{1+u_n}\right)$ ne converge pas elle non plus vers 0. De ce fait, les séries $\sum u_n$ et $\sum \dfrac{u_n}{1+u_n}$ sont toutes deux grossièrement divergentes, donc divergentes.

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, alors $\dfrac{u_n}{1+u_n} \sim u_n$. Les séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{u_n}{1+u_n}$ sont à terme général positif, et leurs termes généraux sont équivalents, elles sont donc de même nature.

Exercice 4

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \arccos\left(\dfrac{n-1}{n}\right)$. Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$.

$\dfrac{n-1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$, donc, par continuité de la fonction $\arccos$, la suite (u_n) converge vers $\arccos(1) = 0$.

On peut dès lors, en utilisant le développement limité à l'ordre 2 de $\cos$, écrire que : $\cos(u_n) = 1 - \dfrac{u_n^{\ 2}}{2} + o\left(u_n^{\ 2}\right)$.

D'autre part, $\cos(u_n) = \cos\left(\arccos\left(\dfrac{n-1}{n}\right)\right) = \dfrac{n-1}{n}$.

On a donc $1 - \dfrac{u_n^{\ 2}}{2} + o\left(u_n^{\ 2}\right) = 1 - \dfrac{1}{n}$, d'où : $u_n^{\ 2} \sim \dfrac{2}{n}$. Comme u_n est positif (c'est un arccosinus) ; il en résulte que $u_n \sim \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$. Par comparaison à une série de Riemann (divergente) : la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ diverge.

Exercice 5

Nature de la série de terme général : $\dfrac{(-1)^n}{n^{3/4} + \sin(n)}$.

Posons pour tout $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{3/4} + \sin(n)}$.

On a :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{n^{3/4}} \frac{1}{1 + \dfrac{\sin(n)}{n^{3/4}}} = \frac{(-1)^n}{n^{3/4}}\left(1 - \frac{\sin(n)}{n^{3/4}} + o\left(\frac{1}{n^{3/4}}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n^{3/4}} + \frac{(-1)^n \sin(n)}{n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/4}}\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n^{3/4}} + \frac{(-1)^n \sin(n)}{n^{3/2}} + v_n \ , \end{aligned}$$

avec $v_n = o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$.

Or :

- $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^{3/4}}$ converge d'après le théorème spécial des séries alternées (car la suite $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^{3/4}}$;
- $\sum \dfrac{(-1)^n \sin(n)}{n^{3/2}}$ converge absolument (car $\left|\dfrac{(-1)^n \sin(n)}{n^{3/2}}\right| \leq \dfrac{1}{n^{3/2}}$, et la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge).

- $\sum w_n$ converge absolument (là aussi par comparaison avec $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$).

Au final, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^{3/4} + \sin(n)}$ est convergente.

Exercice 6

Soit a un réel strictement positif fixé. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} a^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = a^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}$.

On sait (et l'on sait démontrer !) que : $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$, où γ est la constante d'Euler.

On en déduit que $u_n = a^{\ln(n) + \gamma + o(1)}$, soit $u_n \sim a^{\gamma} a^{\ln(n)} = a^{\gamma} n^{\ln(a)}$.

Par comparaison à la série de Riemann $\sum n^{\ln(a)}$: $\sum u_n$ converge si et seulement si $\ln(a) < -1$, c'est-à-dire si et seulement si $a < \mathrm{e}^{-1}$.

Exercice 11

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

1. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} a_n$. *On pourra penser aux sommes de Riemann*.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_{2n} = a_n$.

b. Retrouver alors la somme de la série harmonique alternée $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

1. On a $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, où f est la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t}$. f est continue sur le segment $[0,1]$, le résultat du cours concernant les sommes de Riemann s'applique donc, et assure que $\lim a_n = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$, soit $\lim a_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 2$.

2. Procédons par récurrence. On a $a_1 = \frac{1}{2}$ et $S_2 = \sum_{k=1}^{2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$, donc la propriété est vraie au rang 1.

Si on la suppose vraie à un rang $n \in \mathbb{N}^*$: d'une part :

$$a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} = \sum_{j=2}^{n+2} \frac{1}{n+j} = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} + \sum_{j=1}^{n+2} \frac{1}{n+j},$$

ce qui donne $a_{n+1} = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} + a_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} + a_n$. D'autre part :

$$S_{2(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}.$$

Comme par hypothèse de récurrence $S_{2n} = a_n$, on en conclut que $S_{2(n+1)} = a_{n+1}$, et ceci achève la récurrence.

3. D'après **2.** et **1.**, on a $\lim S_{2n} = \lim a_n = \ln 2$. Il est alors clair qu'également $\lim S_{2n+1} = \ln 2$, puisque $S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$. Les suites des termes d'indices pairs et impairs de la suite (S_n) convergeant vers une même limite, (S_n) converge elle aussi vers cette limite. Cela revient à dire que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge, et que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$.

Exercice 12

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \sum_{k=1}^{n} \ln k$.

1. A l'aide d'une intégrale, montrer que v_n est équivalent à $n \ln n$ quand n tend vers $+\infty$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, prouver l'égalité : $\ln\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}\right) - \ln\left(\sqrt[n]{n!}\right) = \frac{1}{n+1}\left(\ln(n+1) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(k)\right)$.

3. Etudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$.

4. Montrer que $v_n = n \ln(n) - n + o(n)$.

5. Etudier la convergence de la série de terme général $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

1. On adopte le même principe que pour la comparaison série/intégrale (ici la fonction sous-jacente est croissante et non décroissante, mais cela ne change pas la philosophie) :

La fonction $t \mapsto \ln t$ est croissante sur $[1, +\infty[$, donc pour tout $k \geq 2$: $\int_{k-1}^{k} \ln t \, dt \leq \ln k \leq \int_{k}^{k+1} \ln t \, dt$.

On en déduit que pour tout $n \geq 2$, $\sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \ln t \, dt \leq \sum_{k=2}^{n} \ln n \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k}^{k+1} \ln t \, dt$, soit (en utilisant la relation de Chasles d'une part, et le fait que le terme d'indice 1 de la somme $v_n = \sum_{k=1}^{n} \ln k$ est nul d'autre part) :

$$\int_{1}^{n} \ln t \, dt \leq v_n \leq \int_{2}^{n+1} \ln t \, dt$$

On a donc $[t \ln t - t]_1^n \leq v_n \leq [t \ln t - t]_2^{n+1}$, soit :

$n \ln(n) - n + 1 \leq v_n \leq (n+1)\ln(n+1) - (n+1) - 2\ln 2 + 2$.

Comme : $n \ln(n) - n + 1 \sim n \ln(n)$ et $(n+1)\ln(n+1) - (n+1) - 2\ln 2 + 2 \sim n \ln n$, on en déduit, par encadrement, que $v_n \sim n \ln(n)$.

4. On a aussi $v_n = n \ln(n) - n + o(n)$ en reprenant ce qui précède, et en affinant juste un peu.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\ln\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}\right) - \ln\left(\sqrt[n]{n!}\right) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} \ln(k) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \\
&= \frac{1}{n+1}\ln(n+1) - \frac{1}{n}\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \\
&= \frac{1}{n+1}\left(\ln(n+1) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(k)\right)
\end{aligned}$$

3. Il ressort de ce qui précède que

$$\ln\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}\right) - \ln\left(\sqrt[n]{n!}\right) \geq \frac{1}{n+1}\left(\ln(n+1) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(n+1)\right) = 0,$$

Ainsi la suite $\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ est décroissante. Elle tend de plus vers 0 (cf. l'équivalent donné en question suivante). Alors d'après le TSSA, $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$ converge.

5. On sait (formule de Stirling), que $n! \sim n^n \, \mathrm{e}^{-n} \sqrt{2\pi n}$. Donc

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{1}{\left(n^n \, \mathrm{e}^{-n} \sqrt{2\pi n} + o\left(n^n \, \mathrm{e}^{-n} \sqrt{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}} \sim \frac{\mathrm{e}}{n}.$$

Par suite, la série $\displaystyle\sum \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ diverge.

Exercice 13

Soient $(u_n)_{n \geq 1}$, $(v_n)_{n \geq 1}$ les suites définies par : $\quad \forall\, n \geq 1, \quad u_n = v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Montrer que les séries $\displaystyle\sum_{n \geq 1} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n \geq 1} v_n$ convergent, mais que la série produit de Cauchy de ces deux séries est divergente.

- La suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \geq 1}$ est décroissante et tend vers 0, donc, d'après le théorème spécial des séries alternées, $\displaystyle\sum_{n \geq 1} u_n = \sum_{n \geq 1} v_n$ converge.

•• Soit $\displaystyle\sum_{n \geq 2} w_n$ la série produit de Cauchy de $\displaystyle\sum_{n \geq 1} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n \geq 1} v_n$. On a pour tout $n \geq 2$,

$\displaystyle w_n = \sum_{k=2}^{n-2} u_k \, v_{n-k} = \sum_{k=2}^{n-2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{k(n-k)}} = (-1)^n \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$. Le maximum de la fonction $t \mapsto t(n-t)$ sur le segment $[0, n]$ est atteint en $\dfrac{n}{2}$ et il est égal à $\dfrac{n^2}{4}$, donc : $\displaystyle |w_n| \geq \sum_{k=2}^{n-2} \frac{2}{n} = \frac{2n-3}{n} \sim 2$. La suite (w_n) ne tend pas vers 0, le produit de Cauchy de $\displaystyle\sum_{n \geq 1} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n \geq 1} v_n$ est donc grossièrement divergent.

Exercice 14

A l'aide de produits de Cauchy, calculer : **1.** $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)3^{-n}$. **2.** $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)3^{-n}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)3^{-n} = \sum_{k=0}^{n} 3^{-n} = \sum_{k=0}^{n} 3^{-k}3^{-(n-k)}$. On reconnaît là le terme général de la série de Cauchy de la série $\sum_{n \geq 0} 3^{-n}$ avec elle – même. Comme la série géométrique $\sum_{n \geq 0} 3^{-n}$ converge absolument, on sait que $\sum_{n \geq 0} (n+1)3^{-n}$ converge aussi (toujours absolument), et que l'on a $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)3^{-n} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} 3^{-n}\right)^2$, d'où :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)3^{-n} = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

2. On recommence. En utilisant la formule $\sum_{k=0}^{n} (k+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, on trouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$(n+1)(n+2)3^{-n} = 2\sum_{k=0}^{n} \left((k+1)3^{-k}\right)3^{-(n-k)}$. $\sum (n+1)(n+2)3^{-n}$ est donc le produit de Cauchy des séries $2\sum (n+1)3^{-n}$ et $\sum 3^{-n}$, qui sont toutes deux absolument convergentes. De ce fait $\sum (n+1)(n+2)3^{-n}$ converge absolument, et l'on a $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)3^{-n} = 2\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)3^{-n}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} 3^{-n}\right) = \frac{27}{4}$.

Exercice 15

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $b_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k\, a_k$.

Toujours pour $n \in \mathbb{N}^*$, on notera $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ et $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$.

1. Déterminer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre A_n, B_n, et b_n.

2. Montrer que les séries numériques $\sum_{n \geq 1} a_n$ et $\sum_{n \geq 1} b_n$ sont de même nature. En cas de convergence, comparer leurs sommes.

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k(k+1)} \sum_{i=1}^{k} i\, a_i\right)$. En intervertissant les sommes :

$$B_n = \sum_{i=1}^{n} \left(i\, a_i \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{k(k+1)}\right).$$

On en déduit que :

$$B_n = \sum_{i=1}^{n} \left(i\, a_i \sum_{k=i}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(i\, a_i \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{n+1}\right)\right) \qquad \text{(télescopage),}$$

puis que $B_n = \sum_{i=1}^{n} a_i - \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} i\, a_i = A_n - n\, B_n$.

2. Supposons que la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge. Alors, la suite des sommes partielles $\left(A_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée. Notons M l'un de ses majorants. De la relation $B_n = A_n - n B_n$, on déduit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ que, puisque $n B_n$ est positif,

$B_n \leq A_n \leq M$.

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 1} b_n$ est à terme général positif, et la suite de ses sommes partielles est majorée. On en déduit que $\sum_{n \geq 1} b_n$ converge.

Supposons maintenant que la série $\sum_{n \geq 1} b_n$ converge, notons S sa somme.

Alors, le reste $R_n = \sum_{k = n+1}^{+\infty} b_k$ est bien défini pour tout n, et $\lim R_n = 0$.

Or :

$$\begin{aligned}
R_n &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k\,(k+1)} \sum_{i=1}^{k} i\,a_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \left(i\,a_i \sum_{k=\max(i,n+1)}^{+\infty} \frac{1}{k\,(k+1)} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(i\,a_i \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k\,(k+1)} \right) + \sum_{i=n+1}^{+\infty} \left(i\,a_i \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k\,(k+1)} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(i\,a_i \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \right) + \underbrace{\sum_{i=n+1}^{+\infty} \left(i\,a_i \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k\,(k+1)} \right)}_{\geq 0} \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} \left(i\,a_i \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \right) = \sum_{i=1}^{n} i\,a_i \frac{1}{n+1} = n\,b_n
\end{aligned}$$

Donc $R_n \geq n\,b_n \geq 0$, et l'on en déduit que $\lim n\,b_n = 0$.

En revenant à la relation $B_n = A_n - n B_n$, on en conclut que $\lim A_n = \lim B_n = S$: $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge, et

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

En conclusion : les séries $\sum_{n \geq 1} a_n$ et $\sum_{n \geq 1} b_n$ sont de même nature, et, en cas de convergence, leurs sommes sont égales.

Exercice 16

On considère un réel a non nul. Déterminer, en fonction de a, la nature de la série de terme général $u_n = a^{\lfloor \ln n \rfloor}$:

1. lorsque a est strictement positif ;

2. lorsque a est strictement négatif.

1. Lorsque $a \geq 1$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement, supposons désormais que $a \in \left]0,1\right[$. Puisqu'ici a est un réel strictement positif, on est en droit d'écrire que $u_n = \mathrm{e}^{\lfloor \ln n \rfloor \ln(a)}$. $\ln(a) < 0$ et $\ln(n) - 1 < \lfloor \ln n \rfloor \leq \ln(n)$, on a donc $e^{(\ln(n)-1)\ln(a)} \leq u_n \leq e^{\ln(n)\ln(a)}$, soit : $\dfrac{n^{\ln(a)}}{a} \leq u_n \leq n^{\ln(a)}$. Il en résulte que $\sum u_n$ est de même nature que la série de Riemann $\sum n^{\ln(a)}$: elle converge si et seulement si $\ln(a) < -1$, soit si et seulement si $a \in \left]0, \dfrac{1}{e}\right[$.

2. On suppose maintenant $a < 0$; $u_n = a^{\lfloor \ln n \rfloor}$ reste bien défini, puisque dans cette écriture la puissance est entière.

$\sum u_n = \sum (-1)^{\lfloor \ln n \rfloor} |a|^{\lfloor \ln n \rfloor}$ n'est pas à terme général positif, et ce n'est pas non plus une série alternée. Traitons tout d'abord deux cas faciles : si $a \leq -1$ la série $\sum u_n$ diverge grossièrement, et d'après **Q1.** lorsque $a \in \left]-\dfrac{1}{e}, 0\right[$, $\sum u_n$ converge absolument. Reste le cas $a \in \left]-1, -\dfrac{1}{e}\right]$, et là la situation se complique.

Notons pour $p \in \mathbb{N}$, $A_p = \left\{ n \in \mathbb{N}^*, \lfloor \ln(n) \rfloor = p \right\}$, et $T_p = \sum_{n \in A_p} u_n$. On va montrer que la suite $(T_p)_{p \geq 0}$ ne tend pas vers 0, et en déduire que la série $\sum u_n$ diverge.

Pour commencer, notons que l'on a $T_p = \sum_{n \in A_p} (-1)^p |a|^p = |a|^p \times \mathrm{card}(A_p)$. De plus pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$n \in A_p \Leftrightarrow p - 1 < \ln(n) \leq p \Leftrightarrow e^{p-1} < n \leq e^p$. On en déduit que $\mathrm{card}(A_p) = \lfloor e^p \rfloor - \lfloor e^{p-1} + 1 \rfloor + 1$, d'où $\mathrm{card}(A_p) \geq e^p - e^{p-1} - 2$.

Par conséquent : $|T_p| \geq |a|^p \times (e^p - e^{p-1} - 2) = e^{p(\ln|a|+1)} \left(1 - \dfrac{1}{e} - \dfrac{2}{e^p}\right)$, et comme $|a| \geq \dfrac{1}{e}$, il en résulte que $|T_p| \geq 1 - \dfrac{1}{e} - \dfrac{2}{e^p}$; il est alors clair que $(T_p)_{p \geq 0}$ ne tend pas vers 0.

Supposons maintenant la série $\sum u_n$ convergente, notons S sa somme. Alors la suite (S_n) de ses sommes partielles tend vers S ; en notant n_p le plus grand entier n'appartenant pas à A_p et m_p le plus grand entier appartenant à A_p, on a $\lim_{p \to +\infty} n_p = \lim_{p \to +\infty} m_p = +\infty$ (car $n_p = \lfloor e^{p-1} \rfloor$ et $m_p = \lfloor e^{p-1} \rfloor$ pour $p \geq 2$).

Donc, $\lim_{p \to +\infty} S_{n_p} = \lim_{p \to +\infty} S_{m_p} = S$, et par suite $\lim_{p \to +\infty} (S_{m_p} - S_{n_p}) = 0$. Mais $S_{m_p} - S_{n_p} = T_p$, $\lim_{p \to +\infty} (S_{m_p} - S_{n_p}) = 0$ est donc impossible. On a ainsi montré par l'absurde que $\sum u_n$ diverge, ouf.

Exercice 17

1. Prouver que la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ converge.

2. Calculer sa somme.

1. La suite $\left(\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\right)_{n \geq 1}$ est décroissante et tend vers 0, donc, d'après le théorème spécial des séries alternées, $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ converge.

2. Le CSSA ne permet évidemment pas d'obtenir la somme de la série considérée. Pour l'avoir, on passe comme d'habitude par des sommes partielles, en espérant peut-être, vue la situation, qu'elles seront télescopiques. En tous cas, on peut toujours essayer. On le fait et l'on obtient la chose suivante, en considérant par exemple les sommes partielles d'ordre pair :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{2j} \ln\left(1+\frac{1}{2j}\right) + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{2j-1} \ln\left(1+\frac{1}{2j-1}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \ln\left(\frac{2j+1}{2j}\right) - \sum_{j=1}^{n} \ln\left(\frac{2j}{2j-1}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \ln\left(\frac{2j+1}{2j}\right) + \sum_{j=1}^{n} \ln\left(\frac{2j-1}{2j}\right),$$

et mince ça ne se télescope pas. Pas grave, on va s'en tirer autrement. En réunissant tous les ln en un seul, on obtient :

$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ S_{2n} = \ln\left(\dfrac{1.3^2.5^2...(2n-1)^2.(2n+1)}{(2.4...(2n))^2}\right)$, que l'on arrange suivant une méthode classique pour faire apparaître des factorielles :

$$S_{2n} = \ln\left(\frac{1.2^2\,3^2\,4^2 5^2...(2n-1)^2(2n)^2(2n+1)}{(2.4...(2n))^4}\right) = \ln\left(\frac{((2n)!)^2(2n+1)}{2^{4n}(n!)^4}\right).$$

Maintenant, la formule de Stirling donne : $\dfrac{((2n)!)^2(2n+1)}{2^{4n}(n!)^4} \sim \dfrac{(2n)^{4n}\,e^{-4n}\,4\pi n(2n+1)}{2^{4n}\,n^{4n}\,e^{-4n}\,(2\pi n)^2}$, puis en simplifiant : $\dfrac{((2n)!)^2(2n+1)}{2^{4n}(n!)^4} \sim \dfrac{4\pi n(2n+1)}{(2\pi n)^2} \sim \dfrac{2}{\pi}$.

On en déduit que $\lim S_{2n} = \ln\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$. Comme $S_{2n+1} - S_{2n} = -\ln\left(1+\dfrac{1}{2n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, on a aussi $\lim S_{2n+1} = \ln\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$, et ainsi $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$.

Exercice 18

Sur la série des restes d'une série convergente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à termes positifs telle que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\ .$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} R_k - \sum_{k=1}^{n} k\,u_k$ en fonction de n et de R_n.

2. Montrer que si la série $\sum_{n\geq 0} R_n$ converge, alors la série $\sum_{n\geq 0} n\,u_n$ converge.

3. On suppose que la série $\sum_{n\geq 0} n\,u_n$ converge. Que vaut $\lim_{n\to+\infty}(n+1)R_n$?

4. En déduire que les séries $\sum_{n\geq 0} R_n$ et $\sum_{n\geq 0} n\,u_n$ sont de même nature, et, qu'en cas de convergence, elles ont la même somme.

1. On a pour tout $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} R_k - \sum_{k=1}^{n} k\,u_k$:

$$\sum_{k=0}^{n} R_k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=k+1}^{+\infty} u_j = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=k+1}^{n} u_j + \sum_{j=n+1}^{+\infty} u_j \right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=k+1}^{n} u_j + R_n \right), \text{ d'où}$$

$$\sum_{k=0}^{n} R_k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=k+1}^{n} u_j + (n+1) R_n = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{j-1} u_j + (n+1) R_n = \sum_{j=1}^{n} j\, u_j + (n+1) R_n .$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} R_k - \sum_{k=1}^{n} k\, u_k = (n+1) R_n$.

2. Supposons la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} R_n$ convergente, notons R sa somme. Les u_k étant positifs, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} R_k \leq R$, et l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} R_k - \sum_{k=1}^{n} k\, u_k = (n+1) R_n$ permet d'en déduire que l'on a aussi $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\, u_k \leq R$.

$\displaystyle\sum_{n \geq 0} n\, u_n$ est à terme général positif et la suite de ses sommes partielles est majorée, donc $\displaystyle\sum_{n \geq 0} n\, u_n$ converge.

3. Supposons que $\displaystyle\sum_{n \geq 0} n\, u_n$ converge. Alors par propriété des restes d'une série convergente, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\, u_k = 0$.

Or $0 \leq (n+1) R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} (n+1) u_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\, u_k$. On en déduit, par encadrement, que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (n+1) R_n = 0$.

4. On a montré que si $\displaystyle\sum_{n \geq 0} R_n$ converge, $\displaystyle\sum_{n \geq 0} n\, u_n$. Réciproquement, si $\displaystyle\sum_{n \geq 0} n\, u_n$, on a $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (n+1) R_n = 0$. En passant à la limite dans l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} R_k - \sum_{k=1}^{n} k\, u_k = (n+1) R_n$, on en déduit que $\displaystyle\sum_{n \geq 0} R_n$ converge, et que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} R_k = \sum_{k=1}^{+\infty} k\, u_k$. Finalement, les séries $\displaystyle\sum_{n \geq 0} R_n$ et $\displaystyle\sum_{n \geq 0} n\, u_n$ sont de même nature, et, en cas de convergence, elles ont la même somme.

Exercice 19

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation (E_n) : $x\, e^{nx} = 1$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, cette équation admet une unique solution réelle x_n.

2. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite ℓ et déterminer cette limite.

3. Déterminer la nature des séries numériques $\sum x_n$ et $\sum x_n^{\,2}$.

4. Donner un équivalent simple de x_n lorsque n tend vers l'infini.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons la fonction $f_n : x \mapsto x\, e^{nx} - 1$. Cette fonction est clairement strictement négative sur $]-\infty, 0[$, et elle est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, avec $f_n(0) < 0$, et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$.

Par suite, d'après le TVI strict : il existe un unique réel x_n tel que $f_n(x_n) = 0$ (et l'on a en outre $x_n > 0$).

2. • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x_{n+1}) = x_{n+1}\, e^{n x_{n+1}} - 1 < x_{n+1}\, e^{(n+1) x_{n+1}} - 1 = f_{n+1}(x_{n+1})$. Par définition, $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$; on a donc $f_n(x_{n+1}) < 0$. Or $f_n(x_n) = 0$ et f_n est croissante sur $\mathbb{R}_+$; on en déduit que $x_{n+1} < x_n$, et que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Elle est de plus minorée (par 0), elle converge donc. Soit ℓ sa limite. Si l'on suppose $\ell > 0$, on a par continuité, en passant au logarithme dans la relation $f_n(x_n) = 0$,

$x_n = -\frac{1}{n}\ln(x_n)$ d'où $\ell \to 0$, absurde. Ainsi, la suite (x_n) converge vers 0.

Exercice 22

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels strictement positifs.

1. On suppose que l'on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ pour tout n assez grand, et que $\sum v_n$ converge. Montrer que $\sum u_n$ converge.

2. ***Règle de Raabe – Duhamel***

On suppose qu'il existe un réel $A > 1$ tel que pour tout n assez grand, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 - \frac{A}{n}$. Montrer que $\sum u_n$ converge.

3. On suppose que pour tout n assez grand, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 - \frac{1}{n}$. Montrer que la série $\sum u_n$ diverge.

1) Soit N un entier tel que $u_{n+1}/u_n \leqslant v_{n+1}/v_n$ pour tout $n \geqslant N$. En faisant le produit membre à membre de telles inégalités, on en déduit que, pour tous entiers m,n tels que $N \leqslant m \leqslant n$, on a $u_n/u_m \leqslant v_n/v_m$. Ainsi, $u_n/u_N \leqslant v_n/v_N$, c'est-à-dire $u_n \leqslant (u_N/v_N)v_n$ pour tout $n \geqslant N$. Puisque la série $\sum_{n=N}^{+\infty} v_n$ converge, la série $\sum_{n=N}^{+\infty} u_n$ converge, par comparaison.

2) Soit $\alpha \in]1,A[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $v_n = 1/n^\alpha$. Si n tend vers $+\infty$, on a:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Par hypothèse, $u_{n+1}/u_n \leqslant 1 - A/n$ dès que n est assez grand. Comme $\alpha < A$, il en résulte que $u_{n+1}/u_n \leqslant v_{n+1}/v_n$ pour tout n assez grand. Mais la série $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^\alpha$ converge (Riemann), donc la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge, d'après 1).

3) Pour tout entier $n \geqslant 2$, posons $v_n = 1/(n-1)$. Pour tout entier n assez grand, $v_{n+1}/v_n = 1 - 1/n \leqslant u_{n+1}/u_n$. La série $\sum_{n=2}^{+\infty} v_n$ diverge (c'est la série harmonique) donc, en vertu de 1), la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge.

Exercice 23

Transformation d'Abel

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_n$.

1. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n$.

2. On suppose que :

- La suite $\left(A_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
- La suite $\left(b_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0 .

a_ Montrer que la série $\sum_{k \geq 0} A_k \left(b_k - b_{k+1}\right)$ converge absolument.

b_ En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ converge.

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Etudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n^\alpha}$.

1. En posant $A_{-1} = 0$, on a, pour tout entier naturel n, $a_n = A_n - A_{n-1}$. On en déduit, grâce à un changement d'indice dans la deuxième somme,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=0}^{n} A_k b_k - \sum_{k=-1}^{n-1} A_k b_{k+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n.$$

2. La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc à termes positifs. On note M un majorant de $(|A_n|)_{n\in\mathbb{N}}$. On alors

$$\sum_{k=0}^{n-1} |A_k(b_k - b_{k+1})| = \sum_{k=0}^{n-1} |A_k|(b_k - b_{k+1}) \leqslant M \sum_{k=0}^{n-1} (b_k - b_{k+1})$$
$$\leqslant M(b_0 - b_n) \leqslant M b_0.$$

La série à terme positifs $\sum |A_n(b_n - b_{n+1})|$ a ses sommes partielles majorées. Elle est donc convergente. La série $\sum A_n(b_n - b_{n+1})$ est donc absolument convergente. On en déduit que $\sum_{k=0}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1})$ a une limite finie quand n tend vers $+\infty$. Comme par ailleurs la suite $(A_n b_n)$ a pour limite 0, $\sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ a une limite finie quand n tend vers $+\infty$ et la série de terme général $a_n b_n$ converge.

3. On pose $a_n = \sin n$ et $b_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$. La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0. Pour montrer la convergence la série de terme général $u_n = a_n b_n$, il suffit de montrer que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Pour $n \geqslant 1$, on a

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \sin k = \Im\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik}\right) = \Im\left(\sum_{k=0}^{n} \left(e^i\right)^k\right) = \Im \frac{1 - e^{i(n+1)}}{1 - e^i}.$$

Comme, pour tout nombre complexe z, $|\Im z| \leqslant |z|$, on en déduit

$$|A_n| \leqslant \left|\frac{1 - e^{i(n+1)}}{1 - e^i}\right| \leqslant \frac{2}{|1 - e^i|}.$$

La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et donc $\sum \dfrac{\sin n}{n^\alpha}$ converge.

Exercice 16

Soient $A \in \mathbb{R}_+^*$, et f une application définie, continue sur l'intervalle ouvert $I =]-A, A[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose $J = I \cap \mathbb{R}_+^*$, et l'on suppose que :

- $\forall x \in J, \; 0 < f(x) < x$.

•• f admet en 0 un développement limité de la forme :

$$f(x) \underset{0}{=} x - a x^k + o\left(x^k\right),$$

où $a \in \mathbb{R}_+^*$ et k est un entier strictement supérieur à 1. Soit enfin $u_0 \in J$.

1. Montrer que l'on définit bien une suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ par la donnée de son premier terme u_0 et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = f\left(u_n\right).$$

Prouver la convergence de la suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$, et déterminer sa limite.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\beta \in \mathbb{R}$, on pose : $v_n = u_{n+1}^{\beta} - u_n^{\beta}$.

Montrer qu'il existe un unique $\beta \in \mathbb{R}$ tel que la suite $\left(v_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ***non nul***. En déduire alors que $u_n \sim \left((k-1)\, a\, n\right)^{\frac{1}{1-k}}$.

3. On pose $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin\left(u_n\right)$. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de u_n.

1. Déjà, l'hypothèse : $\forall x \in J, \; 0 < f(x) < x$, assure que pour tout $x \in J, \; 0 < f(x) < A$, soit $f(x) \in J$.

Comme $u_0 \in J$, on en déduit que la suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in J$.

Ensuite, l'hypothèse $\forall x \in J, \; 0 < f(x) < x$ entraîne que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$, ainsi la suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Comme elle est de plus minorée, elle converge d'après le théorème de la limite monotone. Enfin, puisque f est continue, la limite de $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est un point fixe de cette fonction, appartenant à $[0, A[$. Or f n'a pas de point fixe dans $]0, A[$. On en conclut que la suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 27

1. Soit $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite décroissante de nombres réels positifs ou nuls. En considérant des sommes du type $\sum_{k=1}^{10^n} u_k$ et $\sum_{k=10^n+1}^{10^{n+1}} u_k$, montrer que les séries $\sum_{k \geq 1} u_k$ et $\sum_{k \geq 0} 10^k u_{10^k}$ sont de même nature.

2. ***Application***

Retrouver, suivant la valeur du réel $\alpha > 0$, la nature des séries $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$ puis $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n\left(\ln n\right)^{\alpha}}$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$u_n = \begin{cases} 0 \text{ si l'écriture décimale de } n \text{ comporte le chiffre } 9 \\ \dfrac{1}{n} \text{ sinon} \end{cases}$. Déterminer la nature de la série $\sum_{k \geq 1} u_k$.

1. Occupons – nous déjà des sommes de la forme $\sum_{k=10^n+1}^{10^{n+1}} u_k$. Puisque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante, on a le bête encadrement : $\sum_{k=10^n+1}^{10^{n+1}} u_{10^{n+1}} \leq \sum_{k=10^n+1}^{10^{n+1}} u_k \leq \sum_{k=10^n+1}^{10^{n+1}} u_{10^n}$. En prenant en compte le fait que les sommes encadrantes sont des sommes de constantes, donc immédiates à calculer, on obtient :

$$10^n u_{10^{n+1}} \leq \sum_{k=10^n+1}^{10^{n+1}} u_k \leq 10^n u_{10^n} \qquad (1).$$

Notons $S_p = \sum_{k=2}^{p} u_k$ la somme partielle d'ordre p de la série $\sum_{k \geq 2} u_k$, et $T_n = \sum_{k=0}^{n} 10^k u_{10^k}$ la somme partielle d'ordre n de la série $\sum_{k \geq 0} 10^k u_{10^k}$. Notons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{10^n} = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{k=10^p+1}^{10^{p+1}} u_k$; on obtient donc d'après (1),

$\sum_{p=0}^{n-1} 10^p u_{10^{p+1}} \leq S_{10^n} \leq \sum_{p=0}^{n-1} 10^p u_{10^p}$, soit : $\frac{1}{10}\left(T_n - u_1\right) \leq S_{10^n} \leq T_{n-1}$. Maintenant :

- Supposons que $\sum_{k \geq 1} u_k$ converge, notons S sa somme. Par positivité du terme général, $\frac{1}{10}\left(T_n - u_1\right) \leq S_{10^n} \leq S$ pour tout n. La suite (T_n) est majorée, donc la série $\sum_{k \geq 0} 10^k u_{10^k}$ (elle aussi de terme général positif) converge.

- Supposons que $\sum_{k \geq 0} 10^k u_{10^k}$ converge, notons T sa somme. Alors pour tout n, $S_n \leq S_{10^n} \leq T_{n-1} \leq T$; la suite (S_n) est majorée, ainsi $\sum_{k \geq 1} u_k$ converge.

Finalement, les séries $\sum_{k \geq 1} u_k$ et $\sum_{k \geq 0} 10^k u_{10^k}$ sont de même nature.

2. Pour $\alpha > 0$, $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels positifs, on peut donc appliquer ce qui précède.

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est de même nature que $\sum_{n \geq 1} 10^n \frac{1}{\left(10^n\right)^\alpha} = \sum_{n \geq 1} \left(10^{1-\alpha}\right)^n$. Cette dernière série est géométrique, elle converge si et seulement si sa raison est strictement inférieure à 1 en valeur absolue, donc si et seulement si $\alpha > 1$; on a ainsi retrouvé, suivant la valeur de α, la nature de la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$.

La suite $\left(\dfrac{1}{n\ln^{\alpha}(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est elle aussi décroissante et à termes positifs, donc $\sum_{n\geq 2}\dfrac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$ est de même nature que la série $\sum_{n\geq 2}10^n\left(\dfrac{1}{10^n\left(\ln\left(10^n\right)\right)^{\alpha}}\right)=\dfrac{1}{(\ln 10)^{\alpha}}\sum_{n\geq 2}\dfrac{1}{n^{\alpha}}$, et l'on retrouve la série de Riemann étudiée précédemment. On en conclut que la série de Bertrand $\sum_{n\geq 2}\dfrac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$ converge si et seulement si $\alpha>1$.

On pourrait continuer et montrer successivement, par la même méthode, que chacune des séries $\sum\dfrac{1}{n\ln(n)\left(\ln(\ln(n))\right)^{\alpha}}$, $\sum\dfrac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))\left(\ln(\ln(\ln(n)))\right)^{\alpha}}$ … est convergente si et seulement si $\alpha>1$.

3. Ici, on ne peut pas appliquer ce qui précède (la suite (u_n) n'est pas décroissante. En revanche, on peut adopter le même type de découpage :

Posons pour tout n, $U_n=\sum_{k=10^n}^{10^{n+1}-1}u_k$:

On a donc $U_n=\sum_{k\in A_n}\dfrac{1}{k}$, où A_n est l'ensemble des entiers dont l'écriture décimale comprend n chiffres, et tels qu'aucun de ces chiffres ne soit égal à 9.

Pour tout $k\in A_n$, on a évidemment $k\geq 10^n$; d'où $\dfrac{1}{k}\leq\dfrac{1}{10^n}$, et donc $U_n\leq\dfrac{\operatorname{card}(A)}{10^n}$.

D'autre part, $\operatorname{card}(A)=8*9^{n-1}$: en effet, choisir un entier k appartenant à A_n revient à choisir ses n chiffres. Aucun de ces chiffres ne doit être égal à 9, donc 9 choix possibles, sauf pour le dernier d'entre eux qui ne peut pas non plus être égal à 0 (donc, 8 choix pour ce chiffres-là).

Ainsi, $U_n\leq\dfrac{8\times 9^{n-1}}{10^n}\leq\left(\dfrac{9}{10}\right)^n$.

Maintenant, en notant à nouveau ici $S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$, on a toujours :

$S_n\leq S_{10^n-1}=\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{k=10^p}^{10^{p+1}-1}u_k$, d'où avec ce qui précède :

$$S_n\leq S_{10^n-1}=\sum_{p=0}^{n-1}U_p\leq\sum_{p=0}^{n-1}\left(\frac{9}{10}\right)^p=\frac{1-\left(\frac{9}{10}\right)^n}{1-\frac{9}{10}}\leq\frac{1}{1-\frac{9}{10}}=10.$$

La série $\sum u_n$ est à terme général positif et la suite de ses sommes partielles est majorée, la série $\sum u_n$ est donc convergente.