PC - Lakanal

2024- 2025

Programme de colles S7

(Séries numériques – début des suites et séries de fonctions)

Semaine du 14 – 10 au 18 – 10

Séries numériques

1. **Définitions :** série numérique ; sommes partielles d'une série ; nature, somme d'une série.
2. **Premières propriétés :** linéarité ; invariance de nature par troncature, convergence des séries complexes.
3. **Liens entre restes, sommes partielles, et terme général d'une série convergente**

II. Premiers critères de convergence

1. **Le théorème de convergence par majoration pour les séries à terme général positif**

   Version majoration de la suite des sommes partielles, version majoration du terme général ; versions o, O, $\sim$.

2. **Divergence grossière ; convergence absolue**

   Notion de séries semi - convergentes. La suite (u_n) est dite sommable lorsque la série $\sum u_n$ converge absolument.

III. Séries usuelles : séries géométriques, géométriques dérivées première et seconde, exponentielles ; séries de Riemann

IV. D'autres critères de convergence

1. **Comparaison série / intégrale**

   a. **Premières notions sur les intégrales généralisées**

   Nature de $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, f étant continue par morceaux sur $[a, +\infty[$. Les propriétés nécessaires à l'établissement des résultats qui suivent ont été données, mais l'étude des intégrales généralisées sera l'objet d'un chapitre ultérieur.

   b. **Théorème de comparaison série/intégrale**

   Si f est continue par morceaux, décroissante et positive sur un voisinage $[a, +\infty[$ de $+\infty$, la série $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. Equivalent des sommes partielles en cas de divergence, encadrement du reste en cas de convergence. On doit pouvoir traiter le cas des séries de Bertrand.

   [La version (avec les mêmes hypothèses) : la série de terme général $f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, a été brièvement explorée].

2. **Comparaison à des séries usuelles**

   a. **Comparaison à une série géométrique :** règle de d'Alembert.

   b. **Comparaison à une série de Riemann :** règle du "$n^{\alpha} u_n$"

3. **Théorème spécial des séries alternées**

   \+ Encadrement de la somme, signe du reste et majoration de sa valeur absolue.

V. Produits de Cauchy ; formule de Stirling (preuves non exigibles, et même non donnée pour les produits de Cauchy)

On peut donner des exercices impliquant des transformations d'Abel, ça a été vu. Mais tout résultat concernant celles-ci est hors programme.

Suites et séries de fonctions

Le tout début. Peu d'exercices faits sur ce chapitre.

I Modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions

1. **Convergence simple d'une suite ou d'une série de fonctions**
2. **Convergence uniforme sur un domaine**
3. **Convergence normale d'une série de fonctions sur un intervalle**
4. **Lien entre ces trois notions**

II Applications de la convergence uniforme

1. **Convergence uniforme, et continuité de la limite d'une suite de fonctions continues.**

   (remarque : la convergence uniforme sur tout segment de I suffit).

   Version série de fonctions.

2. **Interversion $\int$ / limite (suites de fonctions)**

   et intégration terme à terme sur un segment, pour les séries de fonctions.

Questions de cours fléchées (exemples d'énoncés exigibles avec preuve, sauf un) :

L'un ou l'autre des théorèmes de convergence par majoration pour les séries à terme général positif.

La convergence absolue entraîne la convergence.

Théorème spécial des séries alternées.

Théorème de comparaison série/intégrale.

Nature des séries de Bertrand (surtout celles du type $\dfrac{1}{n \ln^{\beta} n}$).

Nature des séries de Riemann.

Séries exponentielles (surtout le cas réel).

Règle de d'Alembert.

Enoncé précis du résultat concernant les produits de Cauchy (sans la preuve).

La convergence normale sur un domaine implique la convergence uniforme sur ce même domaine, qui elle-même implique la convergence simple.

Théorème de continuité d'une limite de suite de fonctions (ou d'une somme de série de fonctions).

Prévisions pour la semaine suivante

Séries numériques ; un peu de suites et de séries de fonctions