Lycée Lakanal

2024- 2025

PC

Liste d'exercices

Suites et séries de fonctions, version complétée

Exercice 1

Etudier la convergence (simple, absolue, uniforme, normale), des séries de termes généraux :

1. $f_n : x \mapsto n x^2 e^{-x\sqrt{n}}$ sur $\mathbb{R}^+$. **2.** $g_n : x \mapsto \dfrac{1}{n + n^3 x^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. **3.** $h_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n x}{\left(1 + x^2\right)^n}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $u_n : \left(\begin{array}{ccc}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \min\left(x^n, 1 - x^n\right) \end{array} \right)$. Soit $f = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Montrer que f est définie et continue sur $]0,1[$.

Exercice 3

Soient $z \in \mathbb{C}^*$, et $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $r \neq |z|$. A l'aide d'un développement en série, calculer $I = \int_0^{2\pi} \dfrac{dx}{z - r e^{ix}}$.

Exercice 4

Soit $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2 x + n}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de S.

2. Montrer que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Déterminer un équivalent de S au voisinage de 0.

Exercice 5

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n + x}$.

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f.

2. Montrer (directement, ie. sans utiliser les résultats de **Q3.**) que f est continue sur D_f.

3. Montrer que f est de classe C^∞ sur D_f.

4. Déterminer $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Exercice 6

Calculer $I = \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x - n x)\, dx$ .On pourra remarquer que $I = \mathrm{Re}\left(\int_0^{2\pi} e^{e^{ix}} e^{-inx}\, dx\right)$, et développer $e^{e^{ix}}$ en série.

Exercice 7

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f. Montrer que f est continue sur ce domaine.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. Montrer, à l'aide d'une intégrale, que $f(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{2}{x^2}$.

Exercice 8*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels telle que la série $\sum_{n\geq 1} n\, a_n$ converge absolument. Pour tout $(x, y) \in [0, \pi]^2$, on pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n \sin(n x) \text{ et } g(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(n x) \sin(n y).$$

Montrer que f est positive sur $[0, \pi]$ si et seulement si g est positive sur $[0, \pi]^2$.

Exercice 9

On pose lorsque c'est possible : $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, x\, e^{-n x^2}$.

Existence, calcul, continuité, équivalent en $+\infty$. La convergence est – elle uniforme ?

Exercice 10

Transformation d'Abel

Soit $f_n : t \mapsto \frac{e^{i n t}}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur tout segment de $]0, 2\pi[$.

On pourra écrire que $e^{i k t} = \left(S_k(t)\right) - \left(S_{k-1}(t)\right)$, avec $S_k(t) = \sum_{p=1}^{k} e^{i p t}$.

2. En déduire que f est continue sur $]0, 2\pi[$.

Exercice 11

Soit la série de fonctions $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$.

1. Montrer que S définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

2. Soient $x > 0$ et $n \geq 1$. Justifier que $\int_n^{n+1} \frac{x}{x^2 + t^2}\, dt \leq \frac{x}{x^2 + n^2} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{x}{x^2 + t^2}\, dt$.

3. En déduire que S admet une limite en $+\infty$, et la déterminer.

Exercice 12

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n - x} - \frac{1}{n + x} \right)$. Justifier l'existence de $\int_0^1 f(x)\, dx$, et calculer cette intégrale.

Exercice 13

On pose lorsque c'est possible : $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + n^4 x^2}$.

a. Domaine de définition et continuité de f.

b. Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

c. Calculer : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(1 + x^2 t^2\right)^2}$.

d. Existence et valeur de $f'\left(0^+\right)$ et $f'\left(0^-\right)$ en fonction de ce qui précède.

Exercice 14

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1 + x^{2n}}$.

1. Préciser l'ensemble de définition D de S.

2. Etudier la continuité de S (remarquer que $S(x) = S\left(\dfrac{1}{x}\right)$).

3. Etudier les variations de S, et en trouver un équivalent aux bornes de D.

Exercice 15

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(nx)}$. *On se place désormais sur* $]1, +\infty[$.

2. Prouver que f est continue sur $]1, +\infty[$. Etudier ses limites en 1 et en $+\infty$.

3. Montrer que f est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$, et établir son tableau de variation.

Exercice 16

Soit la série de fonctions $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$.

1. Montrer que S définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer la limite de S en $+\infty$.

Exercice 17

Soient a un réel strictement positif non entier fixé et f la fonction d'une variable réelle donnée par :

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{1}{(n + x)^a} - \frac{1}{(n + 1 - x)^a} \right].$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.

2. Montrer que f est de classe C^1.

3. Etudier les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

Exercice 18

Soit $f : \left(\begin{array}{ccc} [0, 3\pi] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t + \sin t \end{array} \right)$, et $x \in [0, 3\pi]$. On pose $u_0(x) = x$, et : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}(x) = f\left(u_n(x)\right)$.

1. Etudier la convergence simple de la suite de fonctions $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $]2\pi, 3\pi]$, puis sur $[0, 3\pi]$.

2. $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est – elle uniformément convergente sur $[0, 3\pi]$?

3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{3\pi} u_n(t)\, \mathrm{d}t$.

Exercice 19*

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction périodique de période 4 telle que $g(x) = \begin{cases} 1 + x \text{ si } -2 \leq x \leq 0 \\ 1 - x \text{ si } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $g_k : x \mapsto \frac{1}{2^k} g\left(2^{2^k} x\right)$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum g_k(x)$ converge, et que la fonction $G : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x)$ est continue.

2. Avec les notations usuelles, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = S_n(x) + R_n(x)$.

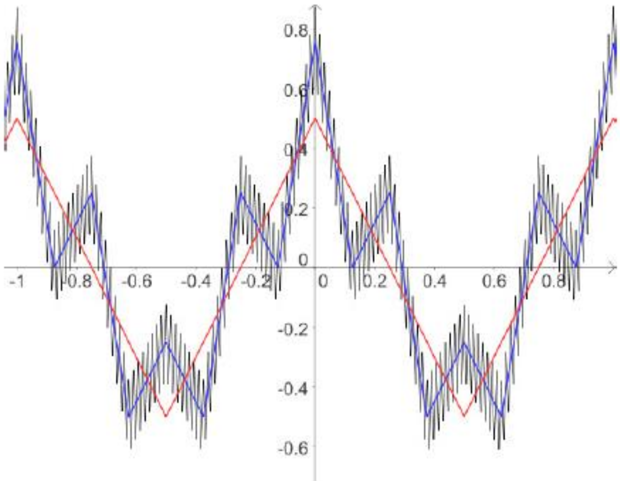
a. Soit x un réel donné. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe $\varepsilon = \pm 1$ tel que les points $(x, g_n(x))$ et $\left(x + \frac{\varepsilon}{2^{2^n}}, g_n\left(x + \frac{\varepsilon}{2^{2^n}}\right)\right)$ soient sur le même segment de graphe de g_n.

b. Soit $h_n = \frac{\varepsilon}{2^{2^n}}$. Montrer que $R_n(x) = R_n(x + h_n)$.

c. Montrer que $\left|g_n(x + h_n) - g_n(x)\right| = 1$.

d. Montrer que $\sup_{1 \leq k \leq n-1} \left(\left|g_k(x + h_n) - S_k(x)\right|\right) \leq 2^{-2^{n-1}}$, puis que $\left|S_{n-1}(x + h_n) - S_{n-1}(x)\right| \leq 2^{-2^{n-1}}$.

3. Montrer que G n'est dérivable en aucun point. *La fonction G est appelée fonction de Mc Carthy.*



Exercice 20*

Soient $\sum_{n \geq 0} a_n$ une série absolument convergente et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée. On considère la fonction :

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \left|x - b_n\right| a_n .$$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que : $\exists\, \varepsilon > 0, \forall\, n \in \mathbb{N}, \left|a_n - x\right| \geq \varepsilon$. Montrer que f est dérivable en x.

3. Déterminer le domaine de dérivabilité de f.

On commencera par étudier la dérivabilité en 0 de $f_0 : x \mapsto \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ b_n = 0}} \left|x - b_n\right| a_n$ et $f_+ : x \mapsto \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ b_n > 0}} \left|x - b_n\right| a_n$.

Exercices d'oral

Exercice 21

1. Etudier la convergence simple de la suite de fonctions données par : $f_n(x) = \cos\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)x\right)$.

2. Y a-t-il convergence uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{R}$?

Exercice 22

On pose, si c'est possible, pour $x \in \mathbb{R}$: $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_S de S.

2. Montrer que S est continue sur D_S.

3. Calculer, pour tout $x \in D_S$, $xS(x) - S(x+1)$.

4. Donner un équivalent simple de $S(x)$ au voisinage de 0.

5. Donner un développement asymptotique de $S(x)$ au voisinage de $+\infty$ à la précision $\frac{1}{x^2}$.

Exercice 23

Montrer que la suite de fonctions (f_n) définie par : $\begin{cases} f_n(0) = 0 \\ \forall\, x > 0,\ f_n(x) = x\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{2n} \end{cases}$ converge simplement, mais pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$, vers une fonction f que l'on déterminera.

Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $f_n : x \mapsto x^n \frac{e^{-x}}{n!}$, puis étudier $\sum f_n$.

Exercice 24

Montrer que $\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.

Exercice 25

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Etudier la convergence simple et la convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$ de la suite de fonctions définie par :

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto n^\alpha x e^{-nx} \end{cases}.$$

Exercice 26

1. Montrer que $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n$ est définie sur $]-1, 1[$.

2. Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, $(1-x)S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) x^{n+1}$.

3. Montrer que la fonction $U : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right) x^{n+1}$ est continue sur $[-1, 1]$.

4. Monter qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $(1-x)S(x) \underset{1^-}{=} -x\ln(1-x) + \ell + o(1)$.

5. Déterminer la nature de l'intégrale $\int_0^1 S(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 27

1. Déterminer le domaine de convergence de $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}(x^2)}{\operatorname{ch}(nx)}$.

2. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$; est – elle continue en 0 ?

Exercice 28

Soit α un réel. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^\alpha x\,\mathrm{e}^{-nx}}{n^2+1}$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 29

Soit $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nt^2}}{n^2+1}$.

1. Montrer que f est définie sur un intervalle I que l'on déterminera.

2.a. Montrer que f est continue sur I.

2.b. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $0 < f(t) - 1 < \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt^2}$, et en déduire que $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 1$.

Exercice 30

On pose lorsque c'est possible : $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \mathrm{e}^{tn}\right)$.

1. Donner l'ensemble de définition D_f de f.

2. Montrer que f est continue sur D_f.

3. Etudier les variations de f.

4. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f.

Exercice 31

On pose lorsque c'est possible : $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \mathrm{e}^{tn}\right)$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.

2. Déterminer la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $-\infty$.

3. Etudier la dérivabilité de f.

Exercices supplémentaires

Exercice 32

Soit $a > 0$. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in [0,1]$, $f_n(x) = n^a x^n (1-x)$.

Etudier la convergence simple, puis uniforme, de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 33

Soit $r \in]-1,1[$. On définit $f_n : x \mapsto r^n \cos nx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Déterminer la fonction S définie par $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

2. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2} = 1 + 2\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

3. Soit $(k,n) \in \mathbb{N}^2$. Calculer $\int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x$.

4. En déduire, pour $k \in \mathbb{N}$, l'expression de $I_k = \int_0^{2\pi} \dfrac{\cos kx}{1-2r\cos x + r^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 34

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs. Pour $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times [0,1]$, on pose $U_n(x) = a_n x^n (1-x)$.

1. Montrer la convergence simple sur $[0,1]$ de la série $\sum U_n$.

2. Montrer que $\sum U_n$ converge normalement sur $[0,1]$ si et seulement si la série $\sum \dfrac{a_n}{n}$ converge.

3. Montrer que $\sum U_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ si et seulement si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

Exercice 35

1. Montrer que $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Etudier sa dérivabilité en 0.

Exercice 36

On pose, pour tout $x \in]1,+\infty[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{\ln(nx)}$.

1. Montrer que f est continue sur $]1,+\infty[$.

2. Etudier ses limites aux bornes.

Exercice 37

α étant un réel, pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n(x) = n^\alpha x \left(1 + n^\alpha\right) e^{-nx}$$

1. Montrer que la suite $(f)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction f à déterminer.

2. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles $(f)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}_+$.

3. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 n^\alpha x \left(1 + \sqrt{n}\right) e^{-nx}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 38

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1.

1. Montrer qu'il existe une suite de polynômes (P_n) telle que la suite (P_n) converge uniformément vers f et la suite (P_n') converge uniformément vers f' sur $[a,b]$.

2. Si f est C^∞, peut-on trouver une suite de polynômes (P_n) telle que pour tout k, la suite $\left(P_n^{(k)}\right)$ converge uniformément vers $f^{(k)}$ sur $[a,b]$?

Exercice 39*

1. Pour tout $(p, q) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$ tel que $p \leq q$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$S_{p,q}(x) = \sum_{n=p}^{q} \frac{\sin nx}{n} .$$

Démonter l'inégalité :

$$\left|S_{p,q}(x)\right| \leq 1 + 2\pi .$$

2. Considérons la série de fonctions

$$x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n \ln 2} .$$

Montrer que cette série de fonctions converge uniformément, mais pas normalement, sur $\mathbb{R}$.