PC

Révisions de première année

Algèbre linéaire

2024– 2025

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Chapitre 1 : *Espaces vectoriels*

I Espaces vectoriels ; sous – espaces vectoriels

1. Espaces vectoriels

a. Définition

Soit E un ensemble, muni d'une loi de composition interne et d'une loi de composition externe

$$+ : \left(\begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \cdot : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda \cdot x \end{array} \right. ,$$

respectivement appelées ***addition***, et ***multiplication externe***.

On dit que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ lorsque les propriétés suivantes sont vérifiées :

i – Commutativité de l'addition

$\forall (x, y) \in E^2,\ x + y = y + x.$

ii – Associativité de l'addition

$\forall (x, y, z) \in E^3,\ x + (y + z) = (x + y) + z.$

iii – Existence d'un élément neutre pour l'addition

$\exists u \in E, \forall x \in E,\ x + u = u + x = x.$ *On notera désormais* 0_E *ou* 0 *cet élément neutre.*

iv – Existence d'un opposé pour l'addition

$\forall x \in E, \exists y \in E,\ x + y = y + x = 0.$ *On notera désormais* $-x$ *l'opposé de* x.

v – Elément neutre pour la multiplication externe

$\forall x \in E,\ 1.x = x$

vi – Associativité mixte

$\forall x \in E,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ (\lambda \mu).x = \lambda.(\mu.x).$

vii – Distributivité de la multiplication externe par rapport à l'addition des éléments de E

$\forall (x, y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y.$

viii – Distributivité de la multiplication externe par rapport à l'addition des scalaires

$\forall x \in E,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ (\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x.$

b. Remarque, conventions et notations

- Lorsque les opérations $+$ et $\cdot$ sont naturelles, on dira simplement que E (au lieu de $(E, +, \cdot)$) est un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel.
- Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés les ***scalaires***, ceux de E les ***vecteurs***.
- Etant donnés un scalaire λ et un vecteur x, on écrira toujours $\lambda \cdot x$, et jamais $\cancel{x\lambda}$ ou $\cancel{\frac{x}{\lambda}}$: le scalaire est à gauche, et

le vecteur à droite.

- En pratique, on ne revient jamais à la définition ci-dessus : pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, on prouve que c'est un sous – espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

c. Espaces vectoriels de référence

- L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) .
- Le $\mathbb{K}$ – ev. $\mathbb{K}^\Omega$ des applications de Ω dans E (où Ω est un ensemble quelconque, et E un $\mathbb{K}$ – ev).
- (*Cas particulier du point précédent*) Le $\mathbb{K}$ – espace vectoriel $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ des suites (réelles, ou complexes).
- L'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ des polynômes (à coefficients réels, ou complexes).
- Le $\mathbb{K}$ – ev $\mathcal{L}(E, F)$, où E et F sont deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels .
- Le $\mathbb{K}$ – espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,\,p}(\mathbb{K})$.

d. Espaces vectoriels produits

Proposition – définition

Soient $(E_1, +_1, \bullet_1)$ et $(E_2, +_2, \bullet_2)$ deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels.

Alors l'ensemble $F = E_1 \times E_2$, muni des lois : $+ : \left(\begin{array}{ccc} F \times F & \to & F \\ ((x_1, x_2), (x'_1, x'_2)) & \mapsto & (x_1 +_1 x'_1, x_2 +_2 x'_2) \end{array}\right)$

et $\bullet : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times F & \to & F \\ (\lambda, (x_1, x_2)) & \mapsto & (\lambda \bullet_1 x_1, \lambda \bullet_2 x_2) \end{array}\right)$

est un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, appelé ***espace vectoriel produit*** de E par F.

2. Combinaisons linéaires

- Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$, et $(u_1, ..., u_n)$ une famille de n vecteurs de E. Soit x un élément de E. On dit que x est ***combinaison linéaire*** des vecteurs $u_1, ..., u_n$ lorsqu'il existe des scalaires $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que : $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$.
- Plus généralement, étant donnée une famille (non nécessairement finie) $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments de E, on dit que x est combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(u_i)_{i \in I}$ lorsque x est combinaison linéaire d'un nombre ***fini*** de vecteurs de cette famille, ie. lorsqu'il existe $i_1, ..., i_n \in I$ et $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_{i_k}$.

De même que dans $\mathbb{K}$, par convention une somme d'éléments de E indexée par l'ensemble vide est nulle : $\sum_{i \in \varnothing} \lambda_i u_i = 0_E$.

3. Sous-espaces vectoriels

a. Définition

Soit E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, et F un sous – ensemble de E. On dit que F est un sous – espace vectoriel de E lorsque les restrictions des lois de E :

restriction de l'addition $+ : \begin{cases} F \times F \to F \\ (x, y) \mapsto x + y \end{cases}$; restriction de la multiplication externe $\cdot : \begin{cases} \mathbb{K} \times F \to F \\ (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x \end{cases}$,

sont bien définies, et que F, muni de ces deux lois, est un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel.

Le fait que ces restrictions soient bien définies signifie que si u et v sont deux éléments de F et λ un scalaire, alors $u + v$ et $\lambda \cdot u$ restent des éléments de F ; il est facile de montrer qu'alors, dire que F, muni de ces lois, est un espace vectoriel, ne revient plus qu'à dire que F est non vide. On obtient ainsi la caractérisation fondamentale suivante :

b. Caractérisation pratique (*proposition*) :

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, et F un ensemble.

Alors F est un sous – espace vectoriel de E si et seulement si les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

i **-** F est inclus dans E ;

ii **-** F est non vide ;

iii **-** pour tout $(u, v) \in F^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda u + v \in F$.

Rappelons à cette occasion qu'un sous – espace vectoriel de E ***n'est jamais vide***.

c. Exemples

- **Deux sous-espaces vectoriels triviaux**

  Soit E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel. Alors $\{0_E\}$ et E sont des sous – espaces vectoriels de E.

- **Dans l'espace $\mathcal{F}(I, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^I$ des applications de I dans $\mathbb{K}$**

  I désigne ici un sous – ensemble de $\mathbb{R}$. Sont des sous – ev de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$:

  - L'ensemble des fonctions paires (respectivement impaires) de I dans $\mathbb{K}$, I étant supposé symétrique par rapport à 0.
  - L'ensemble des fonctions lipchitziennes sur I ; l'ensemble des fonctions bornées sur I.
  - $C^k(I, \mathbb{K})$, ensemble des fonctions de classe C^k sur I.

  Ne sont pas des sev de $\mathbb{K}^I$:

  L'ensemble des fonctions périodiques sur I. L'ensemble des fonctions k – lipchitziennes sur I, où k est un réel positif ou nul fixé. L'ensemble des fonctions monotones sur I.

- **Dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$:**

  Sont des sous – espaces vectoriels de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$:

  - l'ensemble des suites vérifiant la relation $u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$, a et b étant deux réels fixés ;
  - l'ensemble des suites bornées, des suites tendant vers 0, des suites convergentes.
  - L'ensemble $\ell^1(\mathbb{K})$ des suites (u_n) telles que $\sum u_n$ converge absolument ; l'espace $\ell^2(\mathbb{K})$ des suites (u_n) telles que $\sum u_n^2$ converge absolument.

  Ne sont pas des sous – espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

  L'ensemble des suites récurrentes linéaires d'ordre 2. L'ensemble des suites tendant vers $\pm\infty$, des suites monotones.

d. Réunion et intersection de sous – espaces vectoriels

Stabilité par intersection

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et E_1, E_2 deux sous – espaces vectoriels de E.

Alors $E_1 \cap E_2$ est un sous – espace vectoriel de E.

De manière plus générale

Soit $\left(E_i\right)_{i \in I}$ une famille de sous – espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel E.

Alors $\bigcap_{i \in I} E_i$ est un sous – espace vectoriel de E.

Sur les réunions de sous-espaces vectoriels

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et E_1, E_2 deux sous – espaces vectoriels de E.

Si $E_1 \cup E_2$ est un sous – espace vectoriel de E, alors $E_1 \subset E_2$ ou $E_2 \subset E_1$.

Autrement dit, la réunion de deux sous – espaces vectoriels n'est ***jamais*** un sous – espace vectoriel, sauf dans le cas idiot où l'un de ces sous – espaces est inclus dans l'autre .

e. Sous – espaces vectoriels et combinaisons linéaires

Stabilité d'un sous – espace vectoriel par combinaisons linéaires

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, et F un sous – espace vectoriel de E. Soit $\left(u_1, ..., u_n\right)$ une famille de n vecteurs de F. Alors pour tout $\left(\lambda_1, ..., \lambda_n\right) \in \mathbb{K}^n$, le vecteur $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ appartient à F.

Autrement dit, toute combinaison linéaire d'éléments de F appartient encore à F.

Sous – espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

i – Définition

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, et $\left(u_i\right)_{i \in I}$ une famille (non nécessairement finie) d'éléments de E.

On appelle ***sous – espace vectoriel engendré par la famille*** $\left(u_i\right)_{i \in I}$ l'ensemble des combinaisons linéaires de ces vecteurs, et l'on note $\operatorname{Vect}\left(\left(u_i\right)_{i \in I}\right)$ cet ensemble.

- Dans le cas d'une famille finie $\left(u_1, ..., u_n\right)$:

$$\boxed{\operatorname{Vect}\left(\left(u_1, ..., u_n\right)\right) = \left\{u \in E \ / \ \exists \left(\lambda_1, ..., \lambda_n\right) \in \mathbb{K}^n, \ u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k\right\}},$$

ou, plus simplement : $\operatorname{Vect}\left(\left(u_1, ..., u_n\right)\right) = \left\{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k, \ \left(\lambda_1, ..., \lambda_n\right) \in \mathbb{K}^n\right\}$.

- • Dans le cas d'une famille $\left(u_i\right)_{i \in I}$ quelconque :

$$\operatorname{Vect}\left(\left(u_i\right)_{i \in I}\right) = \left\{u \in E \ / \ \exists n \in \mathbb{N}, \exists \left(i_1, ..., i_n\right) \in I^n, \exists \left(\lambda_1, ..., \lambda_n\right) \in \mathbb{K}^n, \ u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_{i_k}\right\}.$$

ii – Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, et $\left(u_i\right)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E. Alors :

- $\operatorname{Vect}\left(\left(u_i\right)_{i \in I}\right)$ est un sous-espace vectoriel de E.
- $\operatorname{Vect}\left(\left(u_i\right)_{i \in I}\right)$ est le plus petit sous – espace vectoriel de E contenant tous les vecteurs u_i, $i \in I$.

II Applications linéaires

A] GÉNÉRALITÉS

1. Applications linéaires

a. Définition

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels, et $f : E \to F$ une application.

On dit que f est une application linéaire de E vers F lorsque

$$\forall (u,v) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v).$$

b. Premières propriétés

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels, et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors :

- $f(0_E) = 0_F$;
- • Pour toute combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ de vecteurs de E : $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(u_i)$.

c. Notations et vocabulaire

- Les applications linéaires sont également appelées **morphismes** d'espaces vectoriels.

  L'ensemble des applications linéaires de E vers F est noté $\mathcal{L}(E,F)$.
- Une application linéaire de E dans lui-même (même espace vectoriel au départ et à l'arrivée) est appelée **endomorphisme** de E. Leur ensemble est noté $\mathcal{L}(E)$ (plutôt que $\mathcal{L}(E,E)$). On trouve également la notation $\mathrm{End}(E)$.
- Une application linéaire bijective est appelée **isomorphisme** d'espaces vectoriels.
- Une application linéaire bijective de E dans lui-même (ie. une application qui est à la fois un isomorphisme et un endomorphisme de E) est un **automorphisme** de E.

  L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathcal{GL}(E)$ (groupe linéaire de E), ou, plus rarement, $\mathrm{Aut}(E)$.

Application linéaire	de E vers F	de E vers E
Quelconque	morphisme	**endo**morphisme
Bijective	**iso**morphisme	**auto**morphisme

2. Applications linéaires et opérations algébriques

a. L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$

Proposition

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels.

Alors $\mathcal{L}(E,F)$, muni de l'addition interne et de la multiplication externe naturelles, est un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel.

b. Composition d'applications linéaires ; l'algèbre $\mathcal{L}(E)$

Proposition

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels, et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications linéaires.

Alors l'application composée $g \circ f : E \to G$ est une application linéaire.

En particulier, l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E est stable pour la loi de composition

$(f,g) \in (\mathcal{L}(E))^2 \mapsto f \circ g$ ($\mathcal{L}(E)$ est ainsi muni d'une structure de $\mathbb{K}$ - algèbre (vocabulaire hors-programme)).

c. Linéarité de l'application réciproque d'un isomorphisme

Proposition

Soit $f : E \to F$ un isomorphisme de $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels.

Alors l'application réciproque de f : $f^{-1} : F \to E$ est également un isomorphisme de $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels.

Conséquence

L'ensemble $\mathcal{GL}(E)$ des automorphismes de E est non vide, stable pour la loi $\circ$, et par passage à la bijection inverse. On dit que c'est un groupe : vocabulaire hors-programme, mais qui justifie l'appellation de groupe linéaire.

B] IMAGE, NOYAU

1. Image d'une application linéaire

a. *Proposition*

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels, E_1 un sous – espace vectoriel de E, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors $f(E_1)$ est un sous – espace vectoriel de F.

b. Image d'une application linéaire

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels, et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- On appelle ***image*** de f, et l'on note $\text{Im}(f)$, l'ensemble $\text{Im}(f) = f(E)$.
- On a donc : $\boxed{\text{Im}(f) = \{y \in F, \exists\, x \in E,\ y = f(x)\}}$, ou, plus simplement : $\text{Im}(f) = \{ f(x),\ x \in E\}$.
- D'après **a.** : $\text{Im}(f)$ est un sous – espace vectoriel de F.
- Il découle immédiatement de la définition d'une image que : $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est surjective si et seulement si $\text{Im}(f) = F$.

2. Noyau d'une application linéaire

a. *Proposition*

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels, F_1 un sous – espace vectoriel de F, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors $f^{-1}(F_1)$ (image réciproque de F_1 par f) est un sous – espace vectoriel de E.

b. Noyau d'une application linéaire

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On sait que $\{0_F\}$ est un sous – espace vectoriel de F. D'après **a.**, $f^{-1}(\{0_F\})$ est donc un sous – espace vectoriel de E.

On appelle ***noyau*** de f ce sous – espace vectoriel de E, et on le note $\text{Ker}(f)$: $\boxed{\text{Ker}(f) = \{u \in E,\ f(u) = 0\}}$.

c. Caractérisation des applications linéaires injectives

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est injective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.

3. Caractérisation des isomorphismes d'espaces vectoriels

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ – ev, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est un isomorphisme ssi $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$ et $\text{Im}(f) = F$.

Chapitre 2 : *Dimension d'un espace vectoriel*

I Somme de deux sous – espaces vectoriels

1. Somme de deux sous – espaces vectoriels

a. Définition

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, E_1 et E_2 deux sous – espaces vectoriels de E.

- On appelle somme de E_1 et de E_2, et l'on note $E_1 + E_2$, l'ensemble :

$$E_1 + E_2 = \left\{ x_1 + x_2 \,,\; x_1 \in E_1, \, x_2 \in E_2 \right\}.$$

- Il découle immédiatement de cette définition que pour tout élément x de E :

Le vecteur x appartient à $E_1 + E_2$ si et seulement s'il existe $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$ tels que $x = x_1 + x_2$.

b. Propriétés et caractérisation

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, E_1 et E_2 deux sous – espaces vectoriels de E. Alors :

i – $E_1 + E_2$ est un sous – espace vectoriel de E.

ii – $E_1 + E_2$ est le plus petit sous – espace vectoriel de E contenant E_1 et E_2.

2. Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

a. Définition

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, E_1 et E_2 deux sous – espaces vectoriels de E.

- On dit que E_1 et E_2 sont en somme directe lorsque tout élément u de $E_1 + E_2$ peut s'écrire ***de manière unique*** sous la forme : $u = u_1 + u_2$, avec $u_1 \in E_1$ et $u_2 \in E_2$.
- Lorsque E_1 et E_2 sont en somme directe, la somme de ces deux sous-espaces vectoriels est notée $E_1 \oplus E_2$.

b. Caractérisation des sommes directes de deux sous-espaces vectoriels

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, et E_1, E_2 deux sous – espaces vectoriels de E.

Alors E_1 et E_2 sont en somme directe si et seulement si $E_1 \cap E_2 = \left\{ 0_E \right\}$.

3. Sous-espaces vectoriels supplémentaires dans un espace vectoriel

a. Définition

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, et F, G deux sous – espaces vectoriels de E.

- On dit que F et G sont ***supplémentaires dans*** E lorsque $F \oplus G = E$.
- Autrement dit, F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si : $F \cap G = \left\{ 0_E \right\}$ et $F \oplus G = E$.

b. Caractérisation ; existence

Soient F et G deux sous – espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel E. Les sous – espaces F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.

On admettra que

Tout sous – espace vectoriel d'un espace vectoriel E admet un supplémentaire dans E.

c. Remarques

- Tout sous – espace strict de E (ie. distinct de E et de $\{0_E\}$) admet une infinité de supplémentaires. L'expression " ~~le~~ supplémentaire de F " n'a donc aucun sens, et doit être remplacée par " ***un*** supplémentaire de F ".
- La notion de sous – espaces supplémentaires n'est pas absolue : par exemple, $\mathrm{Vect}\left(1+X,\,1+X^2\right)$ et $\mathrm{Vect}(X)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$, mais ne le sont pas dans $\mathbb{R}_3[X]$. Il convient donc de toujours préciser dans quel espace vectoriel deux sous – espaces sont supplémentaires.

4. Liens avec les applications linéaires

a. Un premier pas vers le théorème fondamental de l'algèbre linéaire

> Soient E, F deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels, et E_1, E_2 deux sous – espaces vectoriels de E, supplémentaires dans cet espace. Alors toute application $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est entièrement déterminée par ses restrictions au départ à E_1 et E_2 :
>
> Pour tout $u_1 \in \mathcal{L}(E_1,F)$, pour tout $u_2 \in \mathcal{L}(E_2,F)$, il existe un unique $u \in \mathcal{L}(E,F)$ tel que $u_{|E_1} = u_1$ et $u_{|E_2} = u_2$.

Remarque : l'application $u \mapsto \left(u_{|E_1}, u_{|E_2}\right)$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$ - ev de $\mathcal{L}(E,F)$ vers $\mathcal{L}(E_1,F)\times\mathcal{L}(E_2,F)$.

b. Un premier pas vers le théorème du rang

> Soient E, F deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels, et $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
>
> Alors u définit un isomorphisme de tout supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E vers $\mathrm{Im}(u)$.
>
> ***Plus explicitement***
>
> Soit H un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E.
>
> Alors la restriction de u à H au départ, et à $\mathrm{Im}(u)$ à l'arrivée : $u_{|H}^{|\mathrm{Im}(u)} : \left(\begin{array}{rcl} H & \to & \mathrm{Im}(u) \\ x & \mapsto & u(x) \end{array}\right.$
>
> est un isomorphisme de $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels.

c. Structure de l'ensemble des solutions d'une équation du type $u(x) = b$, où $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $b \in F$

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit $b \in F$. On cherche à déterminer l'ensemble des vecteurs x de E tels que $f(x) = b$.

Notons alors Γ_b l'ensemble des solutions de cette équation : $\Gamma_b = \{x \in E,\ f(x) = b\} = f^{-1}(\{b\})$.

Proposition

- Si $b \notin \mathrm{Im}(f)$, alors $\Gamma_b = \varnothing$.
- Si $b \in \mathrm{Im}(f)$, considérons un élément x_0 de E tel que $f(x_0) = b$.

Alors Γ_b est le sous – ensemble de E donné par

$$\Gamma_b = x_0 + \mathrm{Ker}(f) = \{x_0 + z,\ z \in \mathrm{Ker}(f)\} = \{x \in E,\ \exists\, z \in \mathrm{Ker}(f),\ x = x_0 + z\}.$$

II Familles libres, familles génératrices, bases

A] FAMILLES GÉNÉRATRICES

1. Familles génératrices finies

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, et $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E.

- On dit que $(u_1, \ldots, u_n)$ est une ***famille génératrice*** de E lorsque $\text{Vect}(u_1, \ldots, u_n) = E$.
- Autrement dit, $(u_1, \ldots, u_n)$ est une famille génératrice de E si et seulement si :

  i – les vecteurs u_i appartiennent à E ;

  ii – $\forall\, u \in E\,,\ \exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K} \ /\ u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, u_i$.

2. Propriétés

i – Si $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ est génératrice de E, alors toute sur – famille de $\mathcal{F}$ dans E est génératrice de E.

[*Une sur – famille de $\mathcal{F}$ dans E est une famille de vecteurs de E contenant les vecteurs $u_1, \ldots, u_n$*].

ii – Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel E. Alors $(u_1, \ldots, u_n)$ est une famille génératrice de E si et seulement si l'application linéaire $\varphi : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & E \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) & \mapsto & \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n \end{array} \right.$ est surjective.

iii – Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille génératrice de E. Alors

- la famille $\big(f(u_1), \ldots, f(u_n)\big)$ engendre $\text{Im}(f)$;
- f est surjective si et seulement si la famille $\big(f(u_1), \ldots, f(u_n)\big)$ est une famille génératrice de F.

3. Familles génératrices éventuellement infinies

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, et $\mathcal{F} = (u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E.

- On dit que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E lorsque $\text{Vect}(\mathcal{F}) = E$.
- Autrement dit : $(u_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E lorsque :

  i – pour tout $i \in I$, u_i appartient à E ;

  ii – tout vecteur u de E s'écrit comme combinaison linéaire d'un nombre fini des vecteurs u_i.

B] FAMILLES LIBRES – FAMILLES LIÉES

1. familles libres finies, familles liées finies

Soient E un $\mathbb{K}$ – ev, et $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E.

- On dit que $(u_1, \ldots, u_n)$ est une famille libre lorsque toute combinaison nulle des u_k est à coefficients nuls, i.e. lorsque :

$$\boxed{\forall\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K},\ \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0}\,.$$

On dit alors également que $u_1, \ldots, u_n$ sont linéairement indépendants.

- On dit que $\left(u_1, ..., u_n\right)$ est une famille liée lorsqu'il existe une combinaison nulle des u_k à coefficients non tous nuls, i.e. lorsque : $\exists\left(\lambda_1, ..., \lambda_n\right) \in \mathbb{K}^n \setminus \left\{(0, 0, ..., 0)\right\}, \ \lambda_1 u_1 + ... + \lambda_n u_n = 0$.

  On appelle alors relation de dépendance entre les vecteurs u_k toute relation de la forme :

  $$\lambda_1 u_1 + ... + \lambda_n u_n = 0\text{, avec } \lambda_1, ..., \lambda_n \text{ non tous nuls.}$$

2. Propriétés

i – Si $\left(u_1, ..., u_n\right)$ est une famille libre de E, alors toute sous – famille de $\left(u_1, ..., u_n\right)$ est une famille libre.

ii – Soit $\left(u_1, ..., u_n\right)$ une famille de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel E.

Alors $\left(u_1, ..., u_n\right)$ est une famille libre si et seulement si l'application

linéaire $\varphi : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & E \\ \left(\lambda_1, ..., \lambda_n\right) & \mapsto & \lambda_1 u_1 + ... + \lambda_n u_n \end{array}\right.$ est injective.

iii – Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et $\left(u_1, ..., u_n\right)$ une famille libre de vecteurs E.

Alors si f est injective, la famille $\left(f\left(u_1\right), ..., f\left(u_n\right)\right)$ est une famille libre de F.

[En fait, l'application f est injective si et seulement si l'image par f de toute famille libre de E est une famille libre de F].

3. Familles libres éventuellement infinies

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, et $\mathcal{F}$ une famille (quelconque) de vecteurs de E.

- On dit que $\mathcal{F}$ est une famille libre lorsque toute sous – famille finie de $\left(u_i\right)_{i \in I}$ est libre.
- Dans le cas d'une famille $\mathcal{F} = \left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ indexée par l'ensemble des entiers strictement positifs, la famille $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*, \ \forall\ \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}, \ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = 0 \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0.$$

C] BASES

1. Définition

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, et $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E.

- On dit que $\mathcal{F}$ est une base de E lorsque c'est à la fois une famille libre et génératrice de E, c'est-à-dire lorsque tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$.
- En particulier, une famille finie $\left(u_1, ..., u_n\right)$ de vecteurs de E est une base de E si et seulement si :

$$\forall\ u \in E, \ \exists!\left(\lambda_1, ..., \lambda_n\right) \in \mathbb{K}^n \ / \ u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i.$$

2. Bases canoniques d'espaces vectoriels de référence

- La famille formée des vecteurs $(1, 0, 0, ..., 0)$, $(0, 1, 0, ..., 0)$, $(0, 0, 0, ..., 1)$ (dans cet ordre) est une base de $\mathbb{K}^n$, appelée base canonique de $\mathbb{K}^n$.
- $\left(1, X, X^2, ..., X^n\right)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, appelée base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.
- $\left(X^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$, appelée base canonique de $\mathbb{K}[X]$.

3. Coordonnées d'un vecteur dans une base finie

Soit E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, admettant une base finie $\mathcal{B} = \left(u_1, ..., u_n\right)$.

Soit u un élément de E ; ce vecteur s'écrit donc de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$, sous la forme : $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$, avec $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$.

On dit alors que $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont les ***coordonnées***, ou les ***composantes***, de u dans la base $\mathcal{B}$. On dit que $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ est la matrice des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$. On pourra noter : $\left[u\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.

4. Un cas particulier : familles de polynômes étagée en degré

Soit $\left(P_0, ..., P_n\right)$ une famille de polynômes de $\mathbb{K}_n\left[X\right]$ ***étagée en degré***, et plus précisément telle que pour tout $k \in \left\{0, ..., n\right\}$, $\deg\left(P_k\right) = k$. Alors $\left(P_0, ..., P_n\right)$ est une base de $\mathbb{K}_n\left[X\right]$.

5. Propriétés plus générales

i – Si $\mathcal{B} = \left(u_1, ..., u_n\right)$ est une base de E, alors toute sous – famille de $\mathcal{B}$ est libre, et toute sur – famille de $\mathcal{B}$ dans E est une famille génératrice de E.

ii – Soit $\left(u_1, ..., u_n\right)$ une famille de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$ – ev E. Alors, $\left(u_1, ..., u_n\right)$ est une base de E si et seulement si l'application linéaire $\varphi : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \rightarrow & E \\ \left(\lambda_1, ..., \lambda_n\right) & \mapsto & \lambda_1 u_1 + ... + \lambda_n u_n \end{array} \right.$ est bijective.

iii – *Admis*

Tout espace vectoriel possède une base.

iv – Soient $f \in \mathcal{L}\left(E, F\right)$, et $\left(u_1, ..., u_n\right)$ une base de E.

Alors f est bijective si et seulement si la famille $\left(f\left(u_1\right), ..., f\left(u_n\right)\right)$ est une base de F.

6. Bases de sous – espaces vectoriels

a. Remarque

Soit $\mathcal{F} = \left(u_1, ..., u_n\right)$ une famille de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel E.

- Si $\mathcal{F}$ est une famille libre, alors c'est une base de $\mathrm{Vect}\left(u_1, ..., u_n\right)$.
- Réciproquement, soient F un sous – espace vectoriel de E, et $\mathcal{F} = \left(u_1, ..., u_n\right)$ une base de F.

Alors $\mathcal{F}$ est une famille libre de E.

b. Bases de sous – espaces vectoriels supplémentaires dans un ev

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, et F_1, F_2 deux sous – espaces vectoriels de E, supplémentaires dans cet espace.

Soient $\left(\mathrm{e}_1, ..., \mathrm{e}_p\right)$ une base de F_1 et $\left(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_q\right)$ une base de F_2. Alors $\left(\mathrm{e}_1, ..., \mathrm{e}_p, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_q\right)$ est une base de E.

III Espaces vectoriels de dimension finie

A] DÉFINITIONS

1. Théorème fondamental

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, et $n \in \mathbb{N}$. On suppose que E admet une famille génératrice de n vecteurs.

Alors toute famille d'au moins $n+1$ vecteurs de E est liée.

2. Deux exemples primaires

- Dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, toute famille d'au moins $n+1$ vecteurs est liée.
- Dans $\mathbb{R}_n[X]$ ou $\mathbb{C}_n[X]$, toute famille d'au moins $n+2$ polynômes est liée.

3. Dimension d'un espace vectoriel

a. Théorème fondamental (deuxième version)

Toutes les bases d'un espace vectoriel E ont le même cardinal.

b. Définition (dimension d'un espace vectoriel)

- Un espace vectoriel E est dit de dimension n lorsqu'il admet une base de cardinal n. Dans ce cas, toutes ses bases sont de cardinal n.
- Un espace vectoriel E est dit de dimension finie lorsqu'il existe un entier n tel que E soit de dimension n.
- Un espace vectoriel E est dit de dimension infinie lorsqu'il n'est pas de dimension finie, c'est – à – dire lorsque E n'admet pas de base de cardinal fini.

c. Dimension d'espaces vectoriels de référence

- $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension n.
- $\mathbb{K}_n[X]$ est un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension $n+1$.
- $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{F}(I,E)$ pour I ensemble non vide, et E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel non réduit à $\{0\}$, sont des $\mathbb{K}$ – ev de dimension infinie.

B] PROPRIÉTÉS DES ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE

1. Cardinal de familles libres ou génératrices

Si E est un espace vectoriel de dimension n, alors :

- Toute famille libre de vecteurs de E est de cardinal inférieur ou égal à n.
- Toute famille génératrice de E est de cardinal supérieur ou égal à n.

Autre formulation

- Si E possède une famille libre de cardinal p, alors la dimension de E est supérieure ou égale à p.
- Si E possède une famille génératrice de cardinal p, alors $\dim E \leq p$.

2. Familles libres maximales, familles génératrices minimales

Si E est un espace vectoriel de dimension n, alors :

- Toute famille libre de n vecteurs de E est une base de E.
- Toute famille génératrice de n vecteurs de E est une base de E.

3. Théorème de la base incomplète, théorème "de la base redondante"

(*Le premier nom est homologué, le deuxième pas du tout*).

> Soit E un espace vectoriel de dimension n. Alors :
> - Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.
> - De toute famille génératrice de E, on peut extraire une base de E.

C] CALCULS DE DIMENSIONS

1. Sous – espaces vectoriels

Théorème 1

> Si E est un espace vectoriel de dimension finie, alors tout sous – espace vectoriel F de E est de dimension finie, et $\dim F \leq \dim E$.
>
> En outre si $\dim F = \dim E$, alors $F = E$.

Théorème 2

> Soient F_1, F_2 deux sous – espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie E.
>
> Alors : $\dim\left(F_1 + F_2\right) = \dim\left(F_1\right) + \dim\left(F_2\right) - \dim\left(F_1 \cap F_2\right)$.

Question

Donner une généralisation de ce résultat (analogue de la formule du crible).

Cas particuliers et conséquence :

- F_1 et F_2 sont en somme directe si et seulement si $\dim\left(F_1 + F_2\right) = \dim\left(F_1\right) + \dim\left(F_2\right)$.
- F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E si et seulement si $\dim\left(F_1 + F_2\right) = \dim\left(F_1\right) + \dim\left(F_2\right) = \dim(E)$.
- F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E si et seulement si $\begin{cases} F_1 \cap F_2 = \{0\} \\ \dim\left(F_1\right) + \dim\left(F_2\right) = \dim(E) \end{cases}$.

Théorème 3 (dimension d'un produit)

> Soient E et F deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels, de dimensions respectivement n et p.
> Alors l'espace vectoriel produit $E \times F$ est de dimension $n + p$.

D] Rang d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire

1. Rang d'une famille de vecteurs (définition)

- Soit $\mathcal{F} = \left(u_1, ..., u_n\right)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. On appelle rang de la famille $\mathcal{F}$ la dimension du sous – espace vectoriel $\operatorname{Vect}\left(u_1, ..., u_n\right)$ engendré par cette famille.
- Remarquons que le rang d'une famille de n vecteurs est nécessairement inférieur ou égal à n.

2. Rang d'une application linéaire

Soit $f : E \to F$ une application linéaire de E vers F, où E et F sont deux espaces vectoriels.

a. Définition

On appelle rang de f, et l'on note $\mathrm{rg}(f)$, la dimension (infinie ou non) de l'image de f : $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}\, f)$.

b. Théorème du rang

Rappelons que f définit un isomorphisme de tout supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dans E sur $\mathrm{Im}(f)$. On en déduit aisément le

Théorème du rang

Si E est de dimension finie, alors $\boxed{\mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}\, f) = \dim(E)}$.

c. Conséquences

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ – ev de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

- $\mathrm{rg}(f) \leq \dim(F)$. De plus, $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$ si et seulement si f est surjective.
- $\mathrm{rg}(f) \leq \dim(E)$. De plus, $\mathrm{rg}(f) = \dim(E)$ si et seulement si f est injective.
- Il résulte de ce qui précède que f est un isomorphisme si et seulement si $\mathrm{rg}(f) = \dim(E) = \dim(F)$.

d. Rang d'une composée

Soient maintenant E, F trois $\mathbb{K}$ – ev de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

- $\mathrm{rang}(g \circ f) \leq \max(\mathrm{rang}(f), \mathrm{rang}(g))$.
- Si f est un isomorphisme, on a $\mathrm{rang}(g \circ f) = \mathrm{rang}(g)$
- De même, si g est un isomorphisme, $\mathrm{rang}(g \circ f) = \mathrm{rang}(f)$.

Chapitre 3 : *Matrices, et applications linéaires en dimension finie*

I Définitions

1. Matrice

a. Définition

- Soient $n\,,\ p \in \mathbb{N}$. On appelle ***matrice*** à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute

application de $[\![1,\,n]\!] \times [\![1,\,p]\!]$ dans $\mathbb{K}$: $\quad M \,:\, \left(\begin{array}{ccc} [\![1,\,n]\!] \times [\![1,\,p]\!] & \rightarrow & \mathbb{K} \\ & & \\ (i,\,j) & \mapsto & m_{i,\,j} \end{array} \right.$.

- Une matrice à n lignes et p colonnes est représentée sous forme de tableau (à n lignes et p colonnes, évidemment) :

Ne pas parler de la <u>dimension</u> d'une matrice : cela n'a pas de sens

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} \phantom{m_{1,1}} & \phantom{m_{1,2}} & & j^{\text{ième}}\text{ colonne} & & & \end{array} \\ i^{\text{ième}} \text{ ligne} & \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,\,j} & \cdots & \cdots & m_{1,\,p} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots \\ m_{i,1} & m_{i,2} & \cdots & m_{i,\,j} & \cdots & \cdots & m_{i,\,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \cdots & m_{n,\,j} & \cdots & \cdots & m_{n,\,p} \end{pmatrix} \end{array} .$$

On note également : $M = \left(m_{i,\,j} \right)_{(i,\,j) \in [\![1,\,n]\!] \times [\![1,\,p]\!]}$.

- L'ensemble des matrices à n lignes, p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,\,p}\left(\mathbb{K} \right)$.

b. Matrices carrées, matrices lignes, matrices colonnes.

- L'ensemble $\mathcal{M}_{n,\,n}\left(\mathbb{K} \right)$ est plus simplement noté $\mathcal{M}_{n}\left(\mathbb{K} \right)$. Ses éléments sont les

matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

- Les éléments de $\mathcal{M}_{1,\,n}\left(\mathbb{K} \right)$ (resp. de $\mathcal{M}_{n,1}\left(\mathbb{K} \right)$) sont appelés matrices lignes (resp. matrices colonnes).

2. Structure de $\mathbb{K}$ – espace vectoriel sur $\mathcal{M}_{n,\,p}\left(\mathbb{K} \right)$

a. Les opérations

Soient $n\,,\ p \in \mathbb{N}$. On munit $\mathcal{M}_{n,\,p}\left(\mathbb{K} \right)$ des opérations suivantes :

i – Multiplication externe

Pour tout $M = \left(m_{i,\,j} \right)_{(i,\,j) \in [\![1,\,n]\!] \times [\![1,\,p]\!]} \in \mathcal{M}_{n,\,p}\left(\mathbb{K} \right)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\lambda\, M = \left(\lambda\, m_{i,\,j} \right)_{\substack{i \in [\![1,\,n]\!] \\ j \in [\![1,\,p]\!]}} = \begin{pmatrix} \lambda\, m_{1,1} & \cdots & \lambda\, m_{1,\,j} & \cdots & \lambda\, m_{1,\,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda\, m_{i,1} & & \lambda\, m_{i,\,j} & & \lambda\, m_{i,\,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda\, m_{n,1} & \cdots & \lambda\, m_{n,\,j} & \cdots & \lambda\, m_{n,\,p} \end{pmatrix} .$$

ii – Addition

Pour tout $M = \left(m_{i,\,j} \right)_{\substack{i \in [\![1,\,n]\!] \\ j \in [\![1,\,p]\!]}}$ et tout $N = \left(n_{i,\,j} \right)_{\substack{i \in [\![1,\,n]\!] \\ j \in [\![1,\,p]\!]}}$ appartenant à $\mathcal{M}_{n,\,p}\left(\mathbb{K} \right)$,

$M + N = \left(m_{i,j} + n_{i,j} \right)_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ j \in [\![1,p]\!]}}$, soit :

$$M + N = \begin{pmatrix} m_{1,1} + n_{1,1} & \cdots & m_{1,j} + n_{1,j} & \cdots & m_{1,p} + n_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{i,1} + n_{i,1} & & m_{i,j} + n_{i,j} & & m_{i,p} + n_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} + n_{n,1} & \cdots & m_{n,j} + n_{n,j} & \cdots & m_{n,p} + n_{n,p} \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est ainsi muni des opérations naturelles sur $\mathbb{K}^{[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$.

b. L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Proposition

i – L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, muni de l'addition et de la multiplication externe définies précédemment, est un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel.

ii – $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension finie, et $\dim\left(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\right) = n\,p$.

c. Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$; matrices élémentaires

i – ***Une notation : le symbole de Kronecker***

Pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, on définit le symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$ par : $\boxed{\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}}$.

ii – ***Matrices élémentaires***

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, et $(i, j) \in \{1, ..., n\} \times \{1, ..., p\}$. On note $E_{i,j}$ la matrice dont le coefficient de la i ème ligne, j ème colonne est égal à 1, et tous les autres nuls :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & j^{\text{ième}}\text{ colonne} & & \end{array} \\ i^{\text{ième}}\text{ ligne} & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & (0) & 1 & (0) & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = E_{i,j} \end{array}$$

Les $E_{i,j}$ sont appelées ***matrices élémentaires*** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, on a $E_{i,j} = \left(\delta_{i,k}\, \delta_{j,\ell} \right)_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ \ell \in [\![1,p]\!]}}$:

  En effet, le coefficient de la k ième ligne, ℓ ième colonne de $E_{i,j}$ est égal à 1 si $k = i$ et $\ell = j$, et à 0 sinon.

- La famille de matrices $\left(E_{i,j} \right)_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$ est une base, appelée **base canonique,** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Pour toute matrice $M = \left(m_{i,j} \right)_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a $M = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} m_{i,j}\, E_{i,j}$.

3. Transposition

a. Définition

Soit $M = \left(m_{i,j} \right)_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle ***matrice transposée*** de M, et l'on note ${}^tM$, la matrice à p lignes et n colonnes obtenue en échangeant les rôles des lignes et des colonnes de M, c'est – à –

dire la matrice dont le coefficient de la j ième ligne, i ième colonne est $m_{i,j}$:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{c} i^{\text{ième}} \text{ colonne} \end{array} \\
{}^t M = \begin{pmatrix}
m_{1,1} & m_{2,1} & \cdots & m_{i,1} & \cdots & \cdots & m_{n,1} \\
m_{1,2} & m_{2,2} & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots \\
m_{1,j} & m_{2,j} & \cdots & m_{i,j} & \cdots & \cdots & m_{n,j} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\
m_{1,p} & m_{2,p} & \cdots & m_{i,p} & \cdots & \cdots & m_{n,p}
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ j^{\text{ième}} \text{ ligne} \\ \\ \\ \end{array}
\end{array} .
$$

Autrement dit, ${}^t M$ est la matrice $\left(m'_{j,i} \right)_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ donnée par :

$$\forall \, (i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, n]\!], \quad m'_{j,i} = m_{i,j} .$$

b. Propriétés

i* − *Caractère involutif de la transposition

Pour tout $M = \left(m_{i,j} \right)_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: ${}^t\left({}^t M \right) = M$.

Plus précisément : l'application $\begin{pmatrix} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & {}^t M \end{pmatrix}$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$ − espaces vectoriels,

d'isomorphisme inverse $\begin{pmatrix} \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ N & \mapsto & {}^t N \end{pmatrix}$.

ii* − *Transposée d'un produit, d'une matrice inverse

- $\forall \, M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \; \forall \, N \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) : \; {}^t(M N) = {}^t N \, {}^t M$.
- $\forall \, P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$: ${}^t P$ est inversible, et ${}^t\left(P^{-1} \right) = \left({}^t P \right)^{-1}$.

Pour la définition et les propriétés d'un produit ou d'un inverse, cf. plus loin.

4. Matrices carrées particulières

a. Matrices diagonales, matrices triangulaires

- Soit $M = \left(m_{i,j} \right)_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que M est une matrice ***diagonale*** lorsque pour

  tout $(i, j) \in \{1, ..., n\}^2$ tel que $i \neq j$: $m_{i,j} = 0$.

  On note parfois $M = \text{Diag}\left(\lambda_1, ..., \lambda_n \right)$ la matrice diagonale : $M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & (0) \\ & \lambda_2 & & \\ (0) & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

- La matrice diagonale d'ordre n dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1 est appelée ***matrice identité*** ou ***matrice unité*** d'ordre n, et on la note I_n : $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & 1 & & \\ (0) & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Soit $M = \left(m_{i,j} \right)_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que M est une matrice ***triangulaire supérieure*** lorsque pour tout $(i, j) \in \{1, ..., n\}^2$ tel que $i > j$: $m_{i,j} = 0$.

M est dite ***triangulaire inférieure*** lorsque pour tout $(i, j) \in \{1, ..., n\}^2$ tel que $i < j$: $m_{i,j} = 0$.

b. Matrices symétriques, antisymétriques

Soit $M = (m_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit que M est une matrice ***symétrique*** lorsque ${}^tM = M$, c'est – à – dire lorsque les coefficients de M sont symétriques par rapport à la diagonale.

  Autrement dit, M est une matrice symétrique lorsque : $\forall (i, j) \in \{1, ..., n\}^2$, $m_{i,j} = m_{j,i}$.

- La matrice M est dite ***antisymétrique*** lorsque ${}^tM = -M$, c'est – à – dire lorsque

$$\forall (i, j) \in \{1, ..., n\}^2, \quad m_{i,j} = -m_{j,i}.$$

  Remarquons qu'en particulier, les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls.

- Notons $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices carrées symétriques (resp. antisymétriques) d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Alors :

  i – $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous – espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$;

  ii – $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{K})) = \dfrac{n(n+1)}{2}$, et $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{K})) = \dfrac{n(n-1)}{2}$;

  iii – $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

II Produit matriciel

1. Définition

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{i \in 1,n \\ j \in 1,p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{k,\ell})_{\substack{k \in [\![1,p]\!] \\ \ell \in [\![1,q]\!]}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

La matrice produit AB est la matrice $C = (c_{i,\ell})_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ \ell \in [\![1,q]\!]}} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont donnés par :

$$\boxed{\forall (i, \ell) \in \{1, ..., n\} \times \{1, ..., q\}, \quad c_{i,\ell} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,\ell}} \quad .$$

2. propriétés

a. points positifs

i – associativité

Pour tout $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $N \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, et $P \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$: $M(NP) = (MN)P$.

Ceci autorise la notation $M(NP) = (MN)P = MNP$.

ii – éléments neutres à gauche et à droite

Pour tout $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $I_n M = M I_p = M$.

iii – distributivité

$\forall M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall N, P \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$: $M(N + P) = MN + MP$.

$\forall M, N \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall P \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$: $(M + N)P = MP + NP$.

b. Points négatifs

Pour des matrices A et B :

i – non – commutativité

L'égalité $AB = BA$ est en général **fausse**.

ii – diviseurs de zéro

L'implication $AB = 0 \Rightarrow (A = 0)$ ou $(B = 0)$ **est fausse** : il existe des matrices A, B non nulles et telles que $AB = 0$.

3. Puissance p – ième d'une matrice carrée

a. Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

On définit la puissance p – ième de A pour tout $p \in \mathbb{N}$ par : $A^0 = I_n$ et $\forall\ p \in \mathbb{N},\ \ A^{p+1} = A^p A$.

b. Formule du binôme de Newton

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices carrées d'ordre n.

On suppose que A et B commutent. Alors : $\boxed{\forall\ p \in \mathbb{N},\ \ (A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}}$.

En revanche, cette formule n'a aucune raison d'être vraie lorsque A et B ne commutent pas.

c. Cas des matrices diagonales ou triangulaires

Lorsque A est une matrice diagonale (resp. triangulaire inférieure, resp. triangulaire supérieure) , de coefficients diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, A^p est également diagonale (resp. triangulaire inférieure, resp. triangulaire supérieure) , et ses coefficients diagonaux sont $\lambda_1{}^p, \ldots, \lambda_n{}^p$.

4. Inverse d'une matrice carrée... inversible

a. Définitions et premières propriétés

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

- On dit que A est ***inversible*** lorsqu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.
- Lorsqu'une telle matrice B existe, celle – ci est unique. On l'appelle matrice inverse de A, et on la note A^{-1}.
- On a pour tout $(A, B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\right)^2$: $\left(A \text{ est inversible et } B = A^{-1}\right) \Leftrightarrow \left(AB = I_n\right) \Leftrightarrow \left(BA = I_n\right)$.
- **La notion d'inversibilité n'a aucun sens pour une matrice non carrée.**
- L'ensemble des matrices carrées inversibles d'ordre n est noté $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

b. Cas des matrices diagonales ou triangulaires

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On suppose que A est une matrice diagonale : $A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

  Alors A est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls, et dans ce cas :

$$A^{-1} = \mathrm{Diag}\left(\lambda_1{}^{-1}, \ldots, \lambda_n{}^{-1}\right).$$

- On suppose que A est une matrice triangulaire supérieure :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & * & \dots & * & \dots & * \\ 0 & a_{2,2} & \dots & \vdots & (*) & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & * & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{i,i} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Alors A est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, et dans ce cas sa matrice inverse est triangulaire supérieure, de la forme :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{-1} & * & \dots & * & \dots & * \\ 0 & a_{2,2}^{-1} & \dots & \vdots & (*) & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & * & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{i,i}^{-1} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{n,n}^{-1} \end{pmatrix}.$$

- On a évidemment un résultat analogue pour les matrices triangulaires inférieures.

c. Quelques critères d'inversibilité

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. Les propositions suivantes sont équivalentes :

i **–** La matrice A est inversible.

ii **–** Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) : AX = 0 \Rightarrow X = 0$.

iii **–** La matrice A est de rang n.

iv **–** ${}^tA$ est inversible.

v **–** A est la matrice dans une base $\mathcal{B}$ d'un automorphisme de $\mathbb{K}^n$.

vi **–** A est la matrice d'un isomorphisme de $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels de dimension n, relativement à des bases quelconques de ces espaces.

Les points ***iii*** – , ***v*** – et ***vi*** – énoncés ci – dessus résultent de l'égalité entre rang d'une application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie, et rang de sa matrice relativement à des bases de ces espaces... cf. chapitre 3 .

III Matrices de coordonnées

1. Matrice des coordonnées d'un vecteur dans une base *Rappel*

Soit E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension n, et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Tout vecteur u de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$, sous la forme :

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \text{ , avec } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}.$$

On dit que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$, et que $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ est la matrice des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$.

2. Matrice associée à une famille de vecteurs dans une base

Soit E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension n, et $\mathcal{B} = \left(e_1, ..., e_n \right)$ une base de E. Considérons une famille $\mathcal{F} = \left(u_1, ..., u_p \right)$ de p vecteurs de E, et notons, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $\left[u \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_{1,j} \\ \lambda_{2,j} \\ \vdots \\ \lambda_{n,j} \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées du vecteur u_j dans la base $\mathcal{B}$. On appelle matrice des coordonnées des vecteurs de la famille $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ la matrice $\left[\mathcal{F} \right]_{\mathcal{B}} \in \mathcal{M}_{n,p}\left(\mathbb{K} \right)$ dont la $j^{\text{ième}}$ colonne est $\left[u_j \right]_{\mathcal{B}}$:

$$\left[\mathcal{F} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} u_1 & u_2 & \cdots & u_j & \cdots & \cdots & u_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \cdots & \lambda_{1,j} & \cdots & \cdots & \lambda_{1,p} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots \\ \lambda_{i,1} & \lambda_{i,2} & \cdots & \lambda_{i,j} & \cdots & \cdots & \lambda_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \lambda_{n,1} & \lambda_{n,2} & \cdots & \lambda_{n,j} & \cdots & \cdots & \lambda_{n,p} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \end{array} .$$

3. Rang d'une matrice

a. Définition

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}\left(\mathbb{K} \right)$. On appelle ***rang*** de la matrice M le rang de la famille de ses vecteurs colonnes, identifiés à des vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

b. Propriétés

- Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}\left(\mathbb{K} \right)$. Alors $\operatorname{rg}\left(M \right) = \operatorname{rg}\left({}^t M \right)$. *Le rang de M est donc égal au rang de la famille de ses vecteurs lignes.*
- Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs de E, et M la matrice des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{F}$ dans une base $\mathcal{B}$ de E. Alors $\operatorname{rg}\left(M \right) = \operatorname{rg}\left(\mathcal{F} \right)$.

4. Matrices de passage

a. Définition

Soient E un $\mathbb{K}$ – ev. de dimension finie n, $\mathcal{B} = \left(e_1, ..., e_n \right)$ et $\mathcal{B}' = \left(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n \right)$ deux bases de E. On appelle ***matrice de passage*** de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ la matrice $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$ des coordonnées des vecteurs de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

On dit également que $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$ est la ***matrice de changement de base*** $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$:

$$P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} = \left[\mathcal{B}' \right]_{\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_j & \cdots & \cdots & \varepsilon_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \cdots & \lambda_{1,j} & \cdots & \cdots & \lambda_{1,n} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots \\ \lambda_{i,1} & \lambda_{i,2} & \cdots & \lambda_{i,j} & \cdots & \cdots & \lambda_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \lambda_{n,1} & \lambda_{n,2} & \cdots & \lambda_{n,j} & \cdots & \cdots & \lambda_{n,n} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \end{array} \in \mathcal{M}_n\left(\mathbb{K} \right),$$

où les $\lambda_{i,j}$ sont tels que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\varepsilon_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j} e_i$.

b. Propriétés

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ trois bases de E. Alors :

- La matrice de passage $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$ est inversible, et $\left(P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} \right)^{-1} = P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}}$.
- $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} \, P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}''}$.
- ***Formule de changement de base pour les vecteurs :*** Pour tout vecteur u de E : $\boxed{[u]_{\mathcal{B}'} = \left(P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} \right)^{-1} [u]_{\mathcal{B}}}$.

IV Applications linéaires en dimension finie

1. Matrice associée à une application linéaire relativement à des bases

a. Principe fondamental de la linéarité

Ce résultat reste vrai lorsque E est de dimension infinie

Soient E un $\mathbb{K}$ – e.v. (de dimension finie) , et $\mathcal{B} = \left(e_k \right)_{k \in [\![1, n]\!]}$ une base de E.

Soit F un $\mathbb{K}$ – e.v., et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de E dans F.

Alors, f est entièrement déterminée par la donnée des images des vecteurs de $\mathcal{B}$.

Autrement dit,

Si $\left(y_k \right)_{1 \le k \le n}$ est une famille de vecteurs de F fixée, il existe une unique application linéaire $h \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que : $\forall\ k \in \{1, ..., n\}$, $h\left(e_k \right) = y_k$.

Autre manière de présenter les choses,

Soient E un $\mathbb{K}$ – e.v.(d.f.), et $\mathcal{B} = \left(e_k \right)_{k \in [\![1, n]\!]}$ une base de E. Soit F un $\mathbb{K}$ – e.v., et soient f, g deux applications linéaires de E dans F. On suppose que : $\forall\ k \in \{1, ..., n\}$, $f\left(e_k \right) = g\left(e_k \right)$. Alors, $f \equiv g$.

b. Matrice d'une application linéaire relativement à des bases

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension p, F un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension n, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de E vers F. Soient $\mathcal{B} = \left(e_1, ..., e_p \right)$ une base de E, et $\mathcal{B}' = \left(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n \right)$ une base de F.

On appelle matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, et l'on pourra noter $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$, la matrice des cordonnées de la famille de vecteurs $\left(f\left(e_1 \right), ..., f\left(e_p \right) \right)$ dans la base $\mathcal{B}'$. $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$ est donc la matrice de $\mathcal{M}_{n, p}(\mathbb{K})$ donnée par :

$$M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} f(e_1) & f(e_2) & & f(e_j) & & & f(e_p) & \end{array} \\ \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \cdots & \lambda_{1,j} & \cdots & \cdots & \lambda_{1,p} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots \\ \lambda_{i,1} & \lambda_{i,2} & \cdots & \lambda_{i,j} & \cdots & \cdots & \lambda_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \lambda_{n,1} & \lambda_{n,2} & \cdots & \lambda_{n,j} & \cdots & \cdots & \lambda_{n,p} \end{pmatrix} \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_i \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{array} ,$$

où pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $f\left(e_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j}\, \varepsilon_i$.

Lorsque f est un endomorphisme de E, la matrice de f relativement à la même base $\mathcal{B}$ au départ et à l'arrivée sera simplement notée $M_{\mathcal{B}}(f)$.

c. Matrice des coordonnées de l'image d'un vecteur

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{B}'$ une base de F,

et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de E vers F.

Alors, pour tout vecteur u de E, la matrice des coordonnées de $f(u)$ dans la base $\mathcal{B}'$ est donnée par la formule :

$$\boxed{[f(u)]_{\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \times [u]_{\mathcal{B}}}.$$

d. Caractérisation matricielle du noyau et de l'image d'un morphisme

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels de dimension respectivement p et n, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit A la matrice de f relativement à une base $\mathcal{B}$ de E et une base $\mathcal{B}'$ de F.

- Soit $u \in E$. Notons X la matrice des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$.

  Alors u appartient à $\mathrm{Ker}\, f$ si et seulement si $AX = 0$.
- Soit $v \in F$. Notons Y la matrice des coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}'$.

  Alors v appartient à $\mathrm{Im}\, f$ si et seulement il existe $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = Y$.

2. Matrices d'applications linéaires et opérations

a. Matrice d'une combinaison linéaire de morphismes

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels de dimensions finies, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$; notons A et B les matrices de f et g relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda A + B$ est la matrice de $\lambda f + g$ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

b. Matrice d'une composée

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels de dimensions finies, $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{B}'$ une base de F, et $\mathcal{B}''$ une base de G. Alors pour tout $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et pour tout $g \in \mathcal{L}(F, G)$:

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)}.$$

c. Matrice d'un isomorphisme réciproque

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels de dimensions finies, $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{B}'$ une base de F, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors f est un isomorphisme si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est inversible.

De plus lorsque tel est le cas : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\left(f^{-1}\right) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)\right)^{-1}$.

En particulier, lorsque f est un automorphisme de E : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f^{-1}\right) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right)^{-1}$.

d. Matrice d'une itérée d'endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f^n la composée n fois de f avec lui – même : $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$, avec par convention, $f^0 = \mathrm{Id}_E$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f^n\right) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right)^n$.

3. Rang d'une application linéaire, et rang d'une matrice associée

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, avec E, F deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels de dimension finie. Soit A la matrice de f relativement à une base $\mathcal{B}$ de E et une base $\mathcal{B}'$ de F. Alors : $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A)$.

4. Changement de base ; matrices semblables

a. Formule de changement de base pour les applications linéaires

Cas général

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ deux bases de F, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors avec les notations habituelles :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(f) = \left(P_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'}\right)^{-1} \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \times P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} .$$

Cas particulier essentiel

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E, et f un endomorphisme de E.

Notons P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Alors :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times P} .$$

b. Matrices semblables

- Soient A et B deux matrices carrées appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

  A et B sont dites semblables lorsqu'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ que $B = P^{-1} \times A \times P$.

- On déduit de la formule de changement de base que

  A et B sont semblables si et seulement elles représentent le même endomorphisme dans deux bases éventuellement différentes.

- Deux matrices semblables ont même rang ; la réciproque est fausse.