Compléments d'algèbre linéaire

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Familles libres, génératrices, bases

1. Combinaisons linéaires

***Définition** (combinaisons linéaires ; espace vectoriel engendré)*

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, et $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E.

- Soit $x \in E$. On dit que x est ***combinaison linéaire*** des vecteurs de $\mathcal{F}$ si et seulement s'il existe une famille finie $(u_1, \dots, u_n)$ de vecteurs de $\mathcal{F}$, et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, tels que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_{i_k}$.
- L'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de $\mathcal{F}$ est noté $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$. C'est un sous – espace vectoriel de E, appelé sous – espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$.

2. Familles génératrices

a. Définition (*familles génératrices*)

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, et $\mathcal{F} = (u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E.

- On dit que $\mathcal{F}$ est une famille **génératrice de** E lorsque $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = E$.
- Ainsi, $(u_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E lorsque :

  i – pour tout $i \in I$, u_i appartient à E ;

  ii – tout vecteur u de E s'écrit comme combinaison linéaire (finie) des vecteurs u_i :

$$\forall\, x \in E,\ \exists\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, (i_1, \dots, i_n) \in I^n,\ \exists\, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_{i_k}.$$

b. Propriétés

i – Si $\mathcal{F} = (u_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E, alors toute sur – famille de $\mathcal{F}$ dans E est génératrice de E.

[*Une sur – famille de $\mathcal{F}$ dans E est une famille de vecteurs de E contenant les vecteurs u_i, $i \in I$*].

ii – Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille **finie** de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel E. Alors $(u_1, \dots, u_n)$ est génératrice de E si et seulement si l'application linéaire $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & E \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \mapsto & \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n \end{array} \right.$ est surjective.

iii – Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et $\mathcal{F} = (u_i)_{i \in I}$ une famille génératrice de E. Alors

- la famille $\left(f(u_i)\right)_{i \in I}$ engendre $\mathrm{Im}(f)$;
- f est surjective si et seulement si $\left(f(u_i)\right)_{i \in I}$ est une famille génératrice de F.

3. Familles libres, familles liées

a. Définition (*familles libres*)

Soit $\mathcal{F} = \left(u_i\right)_{i \in I}$ une famille de vecteurs du $\mathbb{K}$ – espace vectoriel E.

- La famille $\mathcal{F}$ est dite ***libre*** lorsque toute sous – famille **finie** de $\mathcal{F}$ est libre, c'est – à – dire lorsque :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \forall \left\{i_1,\dots,i_n\right\} \subset I,\ \forall \left(\lambda_1,\dots,\lambda_n\right) \in \mathbb{K}^n,\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_{i_k} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

  On dit alors que les vecteurs u_i, $i \in I$, sont linéairement indépendants.

  Dans le cas d'une famille $\mathcal{F} = \left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ indexée par l'ensemble des entiers strictement positifs, $\mathcal{F}$ est donc libre si et seulement si : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\ \lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{K},\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$

- On dit que $\mathcal{F}$ est une famille ***liée*** lorsqu'il existe une combinaison nulle à coefficients non tous nuls des u_i,

  i.e. lorsque : $\exists\ n \in \mathbb{N}^*,\ \exists \left\{i_1,\dots,i_n\right\} \subset I,\ \exists \left(\lambda_1,\dots,\lambda_n\right) \in \mathbb{K}^n \setminus \left(0,0,\dots,0\right),\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_{i_k} = 0.$

  On appelle alors ***relation de dépendance linéaire*** entre les vecteurs u_i toute relation de la forme :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_{i_k} = 0, \text{ avec } \lambda_1,\dots,\lambda_n \text{ non tous nuls.}$$

b. Propriétés

i – Si $\mathcal{F}$ est une famille libre de E, alors toute sous – famille de $\mathcal{F}$ est une famille libre.

ii – Soit $\left(u_1,\dots,u_n\right)$ une famille **finie** de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel E. Alors $\left(u_1,\dots,u_n\right)$ est libre si et seulement si l'application linéaire $\varphi : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & E \\ \left(\lambda_1,\dots,\lambda_n\right) & \mapsto & \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n \end{array}\right.$ est injective.

iii – Soient $f \in \mathcal{L}\left(E,F\right)$, et $\mathcal{F} = \left(u_i\right)_{i \in I}$ une famille libre de vecteurs de E.

Alors si f est injective, la famille $\left(f\left(u_i\right)\right)_{i \in I}$ est une famille libre.

Plus précisément, f est injective si et seulement si l'image par f de ***toute*** *famille libre de E est une famille libre.*

4. Bases d'un espace vectoriel

a. Définition (*base d'un espace vectoriel*)

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, et $\left(u_i\right)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E.

On dit que $\left(u_i\right)_{i \in I}$ est une **base de** E lorsque $\left(u_i\right)_{i \in I}$ est à la fois une famille libre et génératrice de E.

En particulier, une famille finie $\left(u_1,\dots,u_n\right)$ de vecteurs de E est une base de E si et seulement si :

$$\forall\ u \in E,\ \exists! \left(\lambda_1,\dots,\lambda_n\right) \in \mathbb{K}^n \ /\ u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i.$$

b. Un résultat admis

On *admettra*, donc, que tout espace vectoriel admet une base.

c. Bases canoniques d'espaces vectoriels de référence

- La famille formée des vecteurs $(1, 0, 0, ..., 0)$, $(0, 1, 0, ..., 0)$, $(0, 0, 0, ..., 1)$ (dans cet ordre) est une base de $\mathbb{K}^n$, appelée base canonique de $\mathbb{K}^n$.
- $(1, X, X^2, ..., X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, appelée base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.
- $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$, appelée base canonique de $\mathbb{K}[X]$.
- ***Rappel de notation***

  Soient x et y deux entiers. Le symbole de Kronecker $\delta_{x,y}$ est défini par $\delta_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

  Matrices élémentaires

  Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Pour tout $(a, b) \in \{1, ..., n\} \times \{1, ..., p\}$, notons $E_{a,b}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne, $j^{\text{ème}}$ colonne est : $E_{a,b}(i, j) = \delta_{i,a}\,\delta_{j,b}$.

  Les matrices $E_{a,b}$ sont appelées ***matrices élémentaires*** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. $(E_{a,b})_{(a,b) \in \{1,...,n\} \times \{1,...,p\}}$ est une base de cet espace ; on dit (avec un léger abus de langage) que c'est **une** base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

d. Coordonnées d'un vecteur dans une base

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, et $\mathcal{B} = (u_i)_{i \in I}$ une base de E.

Tout élément de u de E s'écrit donc de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$, sous la forme : $u = \sum_{i \in I} \lambda_i u_i$, où les λ_i sont des scalaires presque tous nuls (ie. tous nuls, sauf un nombre fini d'entre eux).

On dit alors que les λ_i, $i \in I$, sont les ***coordonnées***, ou les ***composantes***, de u dans la base $\mathcal{B}$.

Dans le cas d'une base finie $\mathcal{B} = (u_1, ..., u_n)$, on dit que $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ est la matrice des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$. On pourra noter : $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.

e. Propriétés

i – Si $\mathcal{B}$ est une base de E, toute sous – famille de $\mathcal{B}$ est libre, et toute sur – famille de $\mathcal{B}$ dans E est génératrice de E.

ii – Soit $(u_i)_{i \in \{1,...,n\}}$ une famille finie de vecteurs d'un $\mathbb{K}$ – ev E. Alors $(u_i)_{i \in I}$ est une base de E si et seulement si l'application linéaire $\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}^n & \to & E \\ (\lambda_i)_{i \in I} & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \end{cases}$ est bijective.

iii – Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et $(u_i)_{i \in I}$ une base de E.

Alors f est bijective si et seulement si la famille $(f(u_i))_{i \in I}$ est une base de F.

II Sommes, sommes directes de sous – espaces vectoriels

1. Somme de sous – espaces vectoriels

a. Définition (*somme de sous – espaces vectoriels*)

Soit E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel. Soient $E_1, \dots, E_n$ des sous – espaces vectoriels de E. On note $\sum_{i=1}^{n} E_i$ l'ensemble $\left\{ \sum_{k=1}^{n} x_i, (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i \right\}$. $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est appelé ***somme des sous – espaces vectoriels*** E_i.

b. Propriétés

i – $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est un sous – espace vectoriel de E.

ii – $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est le plus petit sous – espace vectoriel de E contenant chacun des E_i.

c. Remarques

- On peut, de manière plus générale, définir la somme d'une famille quelconque $(E_i)_{i \in I}$ de sous – espaces vectoriels de E par : $\sum_{i \in I} E_i = \bigcup_{\substack{J \subset I \\ J \text{ fini}}} \sum_{i \in J} E_i$.
- Soit, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathcal{F}_i$ une famille génératrice de E_i. Alors la famille $\coprod_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i$ engendre $\sum_{i=1}^{n} E_i$.

2. Somme directe de sous – espaces vectoriels

a. Définition et notation

Soient à nouveau E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel et $E_1, \dots, E_n$ des sous – espaces vectoriels de E.

La somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est dite ***directe*** lorsque tout élément x de $\sum_{i=1}^{n} E_i$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$, avec pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i \in E_i$. Lorsque la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe, on la note $\boxed{\bigoplus_{i=1}^{n} E_i}$.

b. Caractérisation des sommes directes

Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$ – ev, et $E_1, \dots, E_n$ des sev de E. Les propositions suivantes sont équivalentes.

i – La somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe.

ii – Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow x_1 = \dots = x_n = 0$.

iii – Pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $\left(\sum_{i=1}^{k} E_i \right) \cap E_{k+1} = \{0\}$.

iv – Toute famille obtenue par concaténation d'une base de chacun des E_i, est une base de $\sum_{i=1}^{n} E_i$.

De plus, lorsque E est de dimension finie :

La somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe si et seulement si $\sum_{i=1}^{n} \dim(E_i) = \dim \sum_{i=1}^{n} E_i$.

Définition **(*base adaptée à une décomposition en somme directe*)**

Il résulte de ***iv –*** que lorsque $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$, et lorsque, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $\mathcal{B}_i$ est une base de E_i, la famille $\mathcal{B} = \coprod_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i$ (concaténation des familles $\mathcal{B}_i$), est une base de E.

On dit que $\mathcal{B}$ est une ***base adaptée à la décomposition de*** E ***en la somme directe*** $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Remarque

Les E_i peuvent être d'intersections deux à deux toutes réduites à $\{0\}$, sans que leur somme soit directe : prendre par exemple trois droites vectorielles distinctes dans $\mathbb{R}^2$...

3. Un cas particulier : sous – espaces supplémentaires dans un espace E

Soit E un espace vectoriel. On rappelle que :

Définition (***sous – espaces supplémentaires dans*** E)

Deux sous – ev. F et G de E sont dit supplémentaires dans cet espace lorsque $F \oplus G = E$.

Proposition **(*caractérisations de la supplémentarité*)**

Les assertions suivantes sont équivalentes :

i – F et G sont supplémentaires dans E.

ii – $F \cap G = \{0\}$ et $F + G = E$.

iii – Tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.

iv – Toute famille obtenue par concaténation d'une base de F et d'une base de G est une base de E.

De plus, si E est de dimension finie :

F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si $\begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ \dim F + \dim G = \dim E \end{cases}$.

Définition **(*base adaptée à un sous – espace vectoriel*)**

En particulier, lorsque F est un sous – espace vectoriel de E, toute famille obtenue par concaténation d'une base de F, et d'une base de l'un de ses supplémentaires dans E, est une base de E.

On dit qu'une telle base de E est ***adaptée au sous – espace vectoriel*** F.

Exemples

- Soit $n \in \mathbb{N}$; soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré $n+1$. Notons $P\,\mathbb{K}[X]$ le sous – espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ constitué des polynômes divisibles par P. Alors, $P\,\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$ sont supplémentaires dans E.
- L'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques d'ordre n, et l'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques, sont deux sous – espaces supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de dimensions respectives $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n-1)}{2}$.
- Les applications paires et impaires forment deux sous – espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

III Applications linéaires

1. Image et noyau

Définitions **(*noyau, image d'une application linéaire*)**

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- Le ***noyau*** de f, noté $\operatorname{Ker}(f)$, est le sous – espace vectoriel de E défini par : $\boxed{\operatorname{Ker}(f) = f^{-1}(\{0\})}$.

  En pratique, on le détermine généralement grâce à la caractérisation suivante :

  $$\boxed{\text{Soit } x \in E.\ x \text{ est dans } \operatorname{Ker}(f) \text{ si et seulement si } f(x) = 0}\ .$$

- L'***image*** de f, notée $\operatorname{Im}(f)$, est le sous – espace vectoriel de f défini par $\boxed{\operatorname{Im}(f) = f(E)}$.

  Par conséquent, $\boxed{\text{pour tout } y \in F : y \text{ est dans } \operatorname{Im}(f) \text{ si et seulement si } \exists\, x \in E,\ y = f(x)}$.

2. Retour sur les décompositions en somme directe

Proposition 1 **(*bijection induite par une application linéaire*)**

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels, et soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit G un supplémentaire de $\operatorname{Ker}(u)$ dans E. Alors u réalise un isomorphisme de G dans $\operatorname{Im}(u)$: $u\big|_G^{\operatorname{Im}(u)} : \begin{pmatrix} G \to \operatorname{Im}(u) \\ x \mapsto u(x) \end{pmatrix}$ est un isomorphisme entre G et $\operatorname{Im}(u)$.

Proposition 2

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels, et soient $E_1, \dots, E_n$ des sous – espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Soit, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, u_i un élément de $\mathcal{L}(E_i, F)$.

Alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que : $\forall\, i \in \{1, \dots, n\}$, $u_{|E_i} = u_i$.

Remarque

En particulier, étant donné, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, un endomorphisme u_i de E_i, il existe un unique endomorphisme u de E tel que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $u\big|_{E_i}^{E_i} = u_i$.

Proposition 3 – définition **(famille de projecteurs associée à une décomposition en somme directe)**

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels, et soient $E_1, \dots, E_n$ des sous – espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$. Soit, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, p_i le projecteur d'image E_i et de noyau $\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} E_j$. Alors :

i – pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $p_i^2 = p_i$.

ii – Pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ tel que $i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0$.

iii – On a $\sum_{i=1}^{n} p_i = \operatorname{Id}_E$.

On dit que $(p_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ est la ***famille de projecteurs associée à la décomposition*** $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

3. Applications à l'interpolation

Proposition

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $a_0, ..., a_n$ $n+1$ éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. Notons N le polynôme $N = \prod_{k=0}^{n} \left(X - a_k \right)$.

Soit l'application $\varphi : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \mapsto & \left(P(a_0), ..., P(a_n) \right) \end{array} \right.$. Alors

- Ker φ est égal à $\mathbb{K}[X].N$ (le sous – espace de $\mathbb{K}[X]$ formé des polynômes divisibles par N) ;
- • φ définit un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ vers $\mathbb{K}^{n+1}$.

Ceci revient à dire que la restriction de u à $\mathbb{K}_n[X]$ au départ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

***Corollaire – définition* (*polynômes interpolateurs de Lagrange*)**

On considère à nouveau $n+1$ éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts $a_0, ..., a_n$.

Pour tout $i \in \{0, ..., n\}$, posons $L_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{X - a_k}{a_i - a_k}$. Alors :

- Pour tout $(i, j) \in \{0, ..., n\}^2$, $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$.
- • La famille $(L_0, ..., L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
- • • Pour tout $b = (b_0, ..., b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, il existe un unique polynôme P_b à coefficients dans $\mathbb{K}$ et tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \deg(P_b) \leq n \\ \forall\ i \in \{0, ..., n\},\ P_b(a_i) = b_i \end{array} \right. .$$ Ce polynôme est donné par $P_b = \sum_{i=0}^{n} b_i L_i$.

Les polynômes L_i sont appelés ***polynômes interpolateurs de Lagrange*** associés à la famille $(a_0, ..., a_n)$.

***Proposition* (expression d'un polynôme dans une base de lagrange)**

Soient $n+1$ éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts $a_0, ..., a_n$.

Soit $\mathcal{L} = (L_0, ..., L_n)$ la base de Lagrange de $\mathbb{K}_n[X]$ associée à la famille $(a_0, ..., a_n)$. Alors :

- Pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$: $P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i$.
- • En particulier, la somme des polynômes de Lagrange est égale au polynôme constant égal à 1 :

$$\sum_{i=0}^{n} L_i = 1.$$

***Proposition* (bases de Lagrange et matrices de Vandermonde)**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $a_0, ..., a_n$ $n+1$ éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. Soit $\mathcal{L} = (L_0, ..., L_n)$ la base de Lagrange de $\mathbb{K}_n[X]$ associée à la famille $(a_0, ..., a_n)$, et $\mathcal{B} = (1, X, ..., X^n)$ la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$. Alors :

- La matrice de passage de $\mathcal{L}$ vers $\mathcal{B}$ est la matrice de Vandermonde

$$M(a_0, a_1, ..., a_n) = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^n \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$$

- • Soit l'application $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(a_0), ..., P(a_n)) \end{array} \right.$. Alors :
  - ◦ La matrice de ψ relativement à la base $\mathcal{L}$ de $\mathbb{K}_n[X]$ au départ, et à la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{K}^{n+1}$ à l'arrivée, est la matrice identité I_{n+1} ;
  - ◦ ◦ La matrice de ψ relativement à la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}_n[X]$ au départ, et à la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{K}^{n+1}$ à l'arrivée, est la matrice de Vandermonde $M(a_0, a_1, ..., a_n)$.

4. Équations linéaires et formes linéaires

a. Principe de résolution d'une équation linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $b \in F$. On cherche à déterminer l'ensemble des vecteurs x de E tels que $f(x) = b$.

Notons alors Γ_b l'ensemble des solutions de cette équation : $\Gamma_b = \{x \in E,\ f(x) = b\}$.

***Proposition* (*structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire*)**

- Si $b \notin \mathrm{Im}(f)$, alors $\Gamma_b = \varnothing$.
- Si $b \in \mathrm{Im}(f)$, considérons un élément x_0 de E tel que $f(x_0) = b$. Alors Γ_b est le sous – ensemble de E donné par $\Gamma_b = x_0 + \mathrm{Ker}(f) = \{x_0 + z,\ z \in \mathrm{Ker}(f)\} = \{x \in E,\ \exists\, z \in \mathrm{Ker}(f),\ x = x_0 + z\}$.

Remarque

- En particulier, $\Gamma_0 = \{x \in E,\ f(x) = 0\}$ est non vide, et égal à $\mathrm{Ker}(f)$.
- On dit que la condition $b \in \mathrm{Im}(f)$ est la condition de compatibilité de l'équation linéaire.

b. Formes linéaires, espace dual

Soit E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel.

Définition

- On appelle ***forme linéaire sur*** E toute application linéaire de E vers $\mathbb{K}$.
- (***Hors-programme) :*** L'ensemble $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires sur E est un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel.

  On le note E^*, et on l'appelle ***espace dual de*** E.

Remarques

- Toute forme linéaire non nulle est de rang 1, et surjective.
- Si E est de dimension finie, il en est de même pour E^*, et l'on a $\dim(E^*) = \dim(E)$.

Exemples

- Les formes linéaires sur $\mathbb{K}^n$ sont les applications $\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}^n & \to \mathbb{K} \\ (x_1, ..., x_n) & \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \end{cases}$, où $a_1, ..., a_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$ fixés.
- Étant donnés un espace vectoriel E de dimension finie n, et $\mathcal{B} = (\mathrm{e}_1, ..., \mathrm{e}_n)$ une base de E, les formes linéaires sur E sont les applications $f : \begin{cases} E & \to \mathbb{K} \\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{e}_i & \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \end{cases}$, où $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{K}^n$.
- Soient a et b deux réels. Les fonctions $\delta_a : f \mapsto f(a)$, $I_{a,b} : f \mapsto \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}_a : f \mapsto f'(a)$ sont des formes linéaires sur, respectivement, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $D^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- On suppose encore ici E de dimension finie n, et muni d'une base $\mathcal{B} = (\mathrm{e}_1, ..., \mathrm{e}_n)$. Les applications $\varphi_i : \begin{cases} E & \to \mathbb{K} \\ x = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathrm{e}_k & \mapsto x_i \end{cases}$, qui à tout vecteur x associent sa composante suivant e_i relativement à la base $\mathcal{B}$, sont des formes linéaires sur E. On les appelle ***formes linéaires coordonnées*** dans la base $\mathcal{B}$ de E.

c. Hyperplans et formes linéaires

Soit à nouveau E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel.

Définition (hyperplans)

On appelle hyperplan de E tout sous – espace vectoriel de E admettant un supplémentaire de dimension 1 dans E.

Remarque :

Si E est de dimension n, les hyperplans de E sont donc ses sous-espaces vectoriels de dimension $n - 1$.

On prend souvent ceci comme définition des hyperplans en dimension finie.

Proposition 1 (les hyperplans sont les noyaux de formes linéaires non nulles)

Soit H un sous – ensemble de E. Alors, H est un hyperplan de E si et seulement si il existe une forme linéaire φ sur E, non nulle et telle que $\operatorname{Ker} \varphi = H$.

Proposition 2 (les formes linéaires sont caractérisées, à constante multiplicative près, par leur noyau)

Soient φ et ψ deux formes linéaires sur E, toutes deux non nulles.

Alors, φ et ψ ont même noyau si et seulement si elles sont colinéaires.

Proposition 3 (équations d'hyperplans)

On suppose que E est de dimension finie non nulle n, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$. Soit H un sous – ensemble de E. H est un hyperplan de E si et seulement s'il existe $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tel que :

$$H = \left\{ x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \ , \ \sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 0 \right\}.$$

IV Changements de bases en dimension finie

1. Matrice des coordonnées d'un ou de vecteur(s) dans une base *Rappel*

a. Pour un vecteur

Définition **(*matrice des coordonnées d'un vecteur dans une base*)**

Soit E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension n, et soit $\mathcal{B} = \left(e_1, ..., e_n \right)$ une base de E. Tout vecteur u de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$, sous la forme :

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \text{, avec } \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}.$$

On dit que $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont les ***coordonnées***, ou ***composantes***, de u dans la base $\mathcal{B}$, et que $\left[u \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ est la matrice des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$.

b. Pour une famille de vecteurs

Définition

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension n, et $\mathcal{B} = \left(e_1, ..., e_n \right)$ une base de E. Considérons une famille $\mathcal{F} = \left(u_1, ..., u_p \right)$ de p vecteurs de E, et notons, pour tout $j \in \left\{ 1, ..., p \right\}$, $\left[u_j \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_{1,j} \\ \lambda_{2,j} \\ \vdots \\ \lambda_{n,j} \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées du vecteur u_j dans la base $\mathcal{B}$. On appelle matrice des coordonnées des vecteurs de la famille $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ la matrice $\left[\mathcal{F} \right]_{\mathcal{B}} \in \mathcal{M}_{n,p}\left(\mathbb{K} \right)$ dont la $j^{\text{ième}}$ colonne est $\left[u_j \right]_{\mathcal{B}}$:

$$\left[\mathcal{F} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_j & \cdots & \cdots & u_p \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \dots & \lambda_{1,j} & \dots & \dots & \lambda_{1,p} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots \\ \lambda_{i,1} & \lambda_{i,2} & \dots & \lambda_{i,j} & \dots & \dots & \lambda_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \lambda_{n,1} & \lambda_{n,2} & \dots & \lambda_{n,j} & \dots & \dots & \lambda_{n,p} \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} .$$

c. Matrices de passage

Définition **(*matrices de passage, ou de changement de bases*)**

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B} = \left(e_1, ..., e_n \right)$ et $\mathcal{B}' = \left(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n \right)$ deux bases de E.

On appelle ***matrice de passage*** de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ la matrice $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$ des coordonnées des vecteurs de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$. On dit également que $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$ est la ***matrice de changement de base*** $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$:

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = [\mathcal{B}']_{\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_j & \cdots & \cdots & \varepsilon_n & \end{array} \\ \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \cdots & \lambda_{1,j} & \cdots & \cdots & \lambda_{1,n} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots \\ \lambda_{i,1} & \lambda_{i,2} & \cdots & \lambda_{i,j} & \cdots & \cdots & \lambda_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \lambda_{n,1} & \lambda_{n,2} & \cdots & \lambda_{n,j} & \cdots & \cdots & \lambda_{n,n} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \end{array} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),$$

où les $\lambda_{i,j}$ sont tels que pour tout $j \in \{1, ..., n\}$, $\varepsilon_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j} e_i$.

d. Propriétés

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ trois bases de E. Alors :

- La matrice de passage $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ est inversible, et $\left(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$.
- $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\, P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}''}$.
- ***Formule de changement de base pour les vecteurs***

  Pour tout vecteur u de E : $\boxed{[u]_{\mathcal{B}'} = \left(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\right)^{-1}[u]_{\mathcal{B}}}$.

2. Matrice associée à une application linéaire relativement à des bases

a. Définition

Soients E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension p, F un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension n, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Soients $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E, et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ une base de F.

On appelle matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, et l'on pourra noter $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$, la matrice des cordonnées de la famille de vecteurs $(f(e_1), ..., f(e_p))$ dans la base $\mathcal{B}'$. $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est donc la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ donnée par :

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} f(e_1) & f(e_2) & & f(e_j) & & & f(e_p) & \end{array} \\ \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \cdots & \lambda_{1,j} & \cdots & \cdots & \lambda_{1,p} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots \\ \lambda_{i,1} & \lambda_{i,2} & \cdots & \lambda_{i,j} & \cdots & \cdots & \lambda_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \lambda_{n,1} & \lambda_{n,2} & \cdots & \lambda_{n,j} & \cdots & \cdots & \lambda_{n,p} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_i \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{array},$$

où pour tout $j \in \{1, ..., p\}$, $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j} \varepsilon_i$.

Lorsque f est un endomorphisme de E, la matrice de f relativement à la même base $\mathcal{B}$ au départ et à l'arrivée sera simplement notée $M_{\mathcal{B}}(f)$ ou $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

b. Expression matricielle de l'image d'un vecteur

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{B}'$ une base de F, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de E vers F.

Proposition

Pour tout vecteur u de E, la matrice des coordonnées de $f(u)$ dans la base $\mathcal{B}'$ est donnée par :

$$\boxed{[f(u)]_{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \times [u]_{\mathcal{B}}}.$$

***Corollaire* (*caractérisation matricielle du noyau et de l'image d'un morphisme*)**

- Soit $u \in E$. Notons X la matrice des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$.

  Alors u appartient à $\operatorname{Ker} f$ si et seulement si $AX = 0$.
- Soit p la dimension de F. Soit $v \in F$. Notons Y la matrice des coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}'$.

  Alors v appartient à $\operatorname{Im} f$ si et seulement il existe $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = Y$.

c. Compatibilité avec la composition, et conséquences

***Proposition* (*matrice d'une composée*)**

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels de dimensions finies, $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{B}'$ une base de F, et $\mathcal{B}''$ une base de G. Alors pour tout $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et pour tout $g \in \mathcal{L}(F, G)$:

$$\boxed{M_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) \times M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)}.$$

***Proposition* (*matrice d'un isomorphisme inverse*)**

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels de dimensions finies, $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{B}'$ une base de F, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors f est un isomorphisme si et seulement si $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est inversible.

De plus lorsque tel est le cas : $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\left(f^{-1}\right) = \left(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)\right)^{-1}$.

En particulier, lorsque f est un automorphisme de E : $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f^{-1}\right) = \left(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right)^{-1}$.

Matrice d'une itérée d'endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f^n la composée n fois de f avec lui – même : $f^n = \underbrace{f \text{ o } f \text{ o} \ldots \text{o } f}_{n \text{ fois}}$. Par convention, $f^0 = \operatorname{Id}_E$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $M_{\mathcal{B}}\left(f^n\right) = \left(M_{\mathcal{B}}(f)\right)^n$.

3. Changement de base ; matrices semblables

a. Formule de changement de base pour les applications linéaires

Cas général

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ deux bases de F, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors avec les notations habituelles : $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) = \left(P_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}\right)^{-1} \times M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \times P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

Cas particulier essentiel

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E, et f un endomorphisme de E.

Notons P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Alors : $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} \times M_{\mathcal{B}}(f) \times P}$.

Remarque

On observera que lorsque E est un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension finie muni de deux bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ n'est autre que la matrice de Id_E relativement à $\mathcal{B}$ au départ, et $\mathcal{B}'$ à l'arrivée.

b. Matrices semblables

Définition

Soient A et B deux matrices carrées appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

A et B sont dites semblables lorsqu'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ que $B = P^{-1} \times A \times P$.

Caractérisation

On déduit de la formule de changement de base que

deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement elles représentent le même endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension n, relativement à deux bases éventuellement différentes.

Remarque

Deux matrices semblables ont même rang ; la réciproque est fausse.

5. Trace d'une matrice carrée, d'un endomorphisme en dimension finie

a. Trace d'une matrice carrée

Définition

La trace $\mathrm{Tr}(M)$ d'une matrice carrée $M = (m_{i,j})_{(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la somme de ses coefficients diagonaux : $\mathrm{Tr}(M) = \sum_{k=1}^{n} m_{k,k}$.

Proposition

Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$. Alors, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Corollaire

Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$. Si A et B sont semblables, alors elles ont même trace.

b. Trace d'un endomorphisme en dimension finie

Définition (trace d'un endomorphisme en dimension finie)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. D'après ce qui précède, pour toutes bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E, on a $\mathrm{Tr}(M_{\mathcal{B}}(u)) = \mathrm{Tr}(M_{\mathcal{B}'}(u))$.

On définit alors la trace de u par : $\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{Tr}(M_{\mathcal{B}}(u))$, où $\mathcal{B}$ est une base quelconque de E.

Propriétés

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

- l'application trace : $\left(\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ M & \mapsto & \operatorname{Tr}(M) \end{array} \right.$ est une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Pour tout $\mathbb{K}$ – espace vectoriel E de dimension n, l'application trace : $\left(\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \to & \mathbb{K} \\ u & \mapsto & \operatorname{Tr}(u) \end{array} \right.$

  est une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{L}(E)$.

Cas d'un projecteur

Soient E un ev de dimension finie, et p un projecteur de E. Alors la trace de p est égal à son rang : $\operatorname{Tr} p = \operatorname{rg}(p)$.

V Sous – espaces stables et réduction par blocs

1. Sous – espaces stables

a. La définition

Soit E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, F un sous – espace vectoriel de E, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

On dit que F est ***stable par*** $\boldsymbol{u}$ ou $\boldsymbol{u}$ ***– stable*** si et seulement si $u(F) \subset F$.

b. Premiers exemples

Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont stables par u .

2. Stabilité et réduction par blocs

a. Stabilité d'un sous-espace et trigonalisation par blocs

Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$, et F un sous – espace vectoriel de dimension (finie) $p \in \{1, ..., n-1\}$. Soit maintenant $\mathcal{B}_F = (e_1, ..., e_p)$ une base de F, complétée en une base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ de E. *Alors :*

$$F \text{ est } u \text{ – stable} \Leftrightarrow M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A_{(p)} & B_{(p,n-p)} \\ O_{(n-p,p)} & D_{(n-p)} \end{pmatrix},$$

i.e. : F est u – stable si, et seulement si, la matrice de u dans une base adaptée à F est triangulaire par blocs.

b. Stabilités simultanées d'une famille de s.e.v. et diagonalisation par blocs

Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$, et $E_1, ..., E_p$ p sous – espaces vectoriels de E, où $p \in \mathbb{N}^*$, tels que : $E = \overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}} E_i$. *Alors :*

$$\forall i \in \{1, ..., p\},\ E_i \text{ est } u \text{ – stable}$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists\ \mathcal{B}_E \text{ base de } E \text{ adaptée à la décomposition } E = \overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}} E_i \text{ telle que :}$$

$$M_{\mathcal{B}_E}(u) = \begin{pmatrix} \boxed{D_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{D_p} \end{pmatrix},$$

i.e. : les E_i sont tous u – stables si, et seulement si, la matrice de u dans une base adaptée à la décomposition spatiale $E = \overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}} E_i$ est diagonale par blocs. De plus, lorsque tel est le cas, la matrice de u dans *toute* base adaptée à cette décomposition spatiale est diagonale par blocs, de forme similaire.

3. Endomorphismes induits

a. Définition

Soient E un $\mathbb{K}$ – e.v. , $u \in \mathcal{L}(E)$, et F un sous – espace vectoriel de E u – stable.

L'application $u\Big|_F^F : \begin{pmatrix} F \to F \\ x \mapsto u(x) \end{pmatrix}$ (restriction de u à F au départ et à l'arrivée) est bien définie.

On l'appelle ***endomorphisme induit par u sur F***. On la notera dans ce chapitre u_F (*notation non universelle*).

b. Matrice d'un endomorphisme induit

Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$ – e.v. de dimension finie n, $u \in \mathcal{L}(E)$, F un sous – espace vectoriel de E u – stable de dimension $p \in \{1, ..., n-1\}$, et u_F l'endomorphisme induit par u sur F. Soit d'autre part $\mathcal{B}_F = (e_1, ..., e_p)$ une base de F, complétée en une base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ de E adaptée à F.

On sait que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-p,p} & C \end{pmatrix}$, avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$. Avec ces notations, A est la matrice de u_F dans la base $\mathcal{B}_F$.

c. Cas d'une décomposition spatiale en somme directe de sous – espaces stables

Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$, et $E_1, ..., E_p$ p sous – espaces vectoriels de E, où $p \in \mathbb{N}^*$, stables par u, et tels que : $E = \overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}} E_i$.

Soit, pour tout $i \in \{1, ..., p\}$, p_i la dimension de E_i, $\mathcal{B}_i$ une base de ce sous – espace, u_{E_i} l'endomorphisme induit par u sur E_i, et $A_i = M_{\mathcal{B}_i}(u_{E_i}) \in \mathcal{M}_{p_i}(\mathbb{K})$ la matrice de u_{E_i} dans la base $\mathcal{B}_i$. Soit enfin $\mathcal{B} = \coprod_{i=1}^{p} \mathcal{B}_i$ la base de E obtenue par concaténation des $\mathcal{B}_i$. Alors la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix}.$$

d. Quand deux endomorphismes commutent…

Proposition

> Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, u, v deux éléments de $\mathcal{L}(E)$. On suppose que u et v commutent, ie. que $u \circ v = v \circ u$. Alors $\operatorname{Ker}(u)$ et $\operatorname{Im}(u)$ sont stables par v.

VI *Polynômes d'endomorphismes ou de matrices*

1. Polynômes d'endomorphismes ou de matrices carrées

a. La définition

Définition

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, et u un endomorphisme de E.

Pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on pose :

$$P(u) = \sum_{k=0}^{p} a_k u^k = a_0 Id_E + a_1 u + a_2 u^2 + \ldots + a_p u^p.$$

De la même façon, étant donnée une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose :

$$P(A) = \sum_{k=0}^{p} a_k A^k = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_p A^p.$$

b. Quelques propriétés…

…Données sans leurs démonstrations, car celles – ci sont sans difficulté.

***Propriété* 1**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient A, B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose A et B semblables.

Alors, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(A)$ et $P(B)$ sont semblables.

Plus précisément, soit $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = Q^{-1} A Q$. Alors, $P(B) = Q^{-1} P(A) Q$.

***Propriété* 2**

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

Alors les endomorphismes $P(u)$ et $Q(u)$ commutent, et l'on a :

$(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.

On dispose évidemment du résultat analogue pour les matrices carrées.

2. Polynômes annulateurs

a. Définition

- On dit que $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur de l'endomorphisme u lorsque $P(u)$ est l'endomorphisme nul.
- • • De même, P est un polynôme annulateur de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ lorsque $P(A)$ est la matrice nulle.

b. Un théorème d'existence

Théorème

> Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension finie, et u un endomorphisme de E.
>
> Alors il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul et tel que $P(u) = 0$.
>
> De la même façon, toute matrice carrée possède un polynôme annulateur non nul.

Preuve

Considérons la famille d'applications $\left(Id_E, u, u^2, \ldots, u^{n^2}\right)$. Cette famille est composée de $n^2 + 1$ éléments de $\mathcal{L}(E)$, et l'on sait que $\dim(\mathcal{L}(E)) = n^2$. Il en résulte cette famille est liée : il existe $\left(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n^2}\right) \in \mathbb{K}^{n^2+1}$, non tous nuls et tels que $\sum_{k=0}^{n^2} \lambda_k u^k = 0$. Alors, le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n^2} \lambda_k X^k$ est non nul, et l'on a $P(u) = 0$. La démonstration est analogue pour les matrices carrées. □.

3. Application au calcul d'inverse ou de puissances de matrices carrées

a. Calculs d'inverses

Proposition

> Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée, et soit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ un polynôme annulateur de A.
>
> Alors si a_0 est non nul, la matrice A est inversible, et l'on a :
>
> $$A^{-1} = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{p} a_k A^k .$$

$P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$

b. Calculs de puissances

> Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée, et soit P un polynôme annulateur non nul de A.
>
> Soit, pour tout $k \in \mathbb{N}$, R_k le reste de la division euclidienne du polynôme X^k par P.
>
> Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$: $A^k = R_k(A)$.