Lycée Lakanal

PC

Feuille d'exercices déterminants :

quelques corrigés

Exercice 5

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer le déterminant D_n de la matrice de terme général $|i - j|$, $1 \leq i, j \leq n$.

Commentaire si vous savez traiter le cas $n = 5$ …

Commençons par traiter l'exemple de D_5, pour imaginer une méthode générale.

$$D_5 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Soustrayons chaque colonne de la suivante, en commençant par l'avant-dernière:

$$D_5 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Recommençons l'opération, puis développons par rapport à la première ligne:

$$D_5 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 4\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \times 2^3.$$

Opérons de même dans le cas général. D'abord, $D_1 = 0$ et $D_2 = -1$. Supposons $n \geqslant 3$, et notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de D_n. On écrit donc:

$$\begin{aligned} D_n &= \det(C_1, \dots, C_n) = \det(C_1, C_2 - C_1, \dots, C_n - C_{n-1}) \\ &= \det(C_1, C_2 - 2C_1, C_3 + C_1 - 2C_2, \dots, C_n + C_{n-2} - 2C_{n-1}). \end{aligned}$$

Notons $a_{i,j}$ le terme général de la matrice définissant le dernier déterminant. Si $j \in [\![3,n]\!]$ et $i \in [\![1,n]\!]$, il vient:

$$a_{i,j} = |i - j| + |i - (j-2)| - 2\,|i - (j-1)|\,.$$

Le second membre est nul lorsque $i \geqslant j$ ou $i \leqslant j - 2$, alors que $a_{j-1,j} = 2$. D'où:

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 2 \\ n-1 & -n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la dernière ligne, on en déduit :

$$D_n\ (-1)^{n-1}2^{n-2}(n-1).$$

Exercice 6

On note D_n le déterminant de la matrice $A = \left(a_{i,j}\right)_{0 \le i,j \le n}$ avec $a_{i,j} = (i+j)!$, et T_n le déterminant de la matrice $B = \left(a_{i,j}\right)_{0 \le i,j \le n}$ avec $b_{i,j} = \binom{i+j}{i}$.

1. Calculer D_0, D_1, D_2 ainsi que T_0, T_1, T_2.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = 1$.

3. Calculer D_n.

Solution

2. On a pour tout $n \ge 1$:

$$T_n = \begin{vmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \dots & \binom{n-1}{0} & \binom{n}{0} \\ \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \dots & \binom{n}{1} & \binom{n+1}{1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \binom{n-1}{n-1} & \binom{n}{n-1} & \dots & \binom{2n-2}{n-1} & \binom{2n-1}{n-1} \\ \binom{n}{n} & \binom{n+1}{n} & \dots & \binom{2n-1}{n} & \binom{2n}{n} \end{vmatrix}_{n+1}.$$

On a avec la formule de Pascal pour $a<b$ dans $\mathbb{N}$: $\binom{b+1}{a+1}-\binom{b}{a}=\binom{b}{a+1}$, d'où avec les opérations

$L_{n+1} \leftarrow L_{n+1}-L_n,\cdots,L_2 \leftarrow L_2-L_1$, puis en développant selon la première colonne :

$$T_n=\begin{vmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \cdots & \binom{n-1}{0} & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \cdots & \binom{n-1}{1} & \binom{n}{1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \binom{n-1}{n-1} & \cdots & \binom{2n-3}{n-1} & \binom{2n-2}{n-1} \\ 0 & \binom{n}{n} & \cdots & \binom{2n-2}{n} & \binom{2n-1}{n} \end{vmatrix}_{n+1} = \begin{vmatrix} \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{n-1}{1} & \binom{n}{1} \\ \binom{2}{2} & \binom{3}{2} & \cdots & \binom{n}{2} & \binom{n+1}{2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \binom{n-1}{n-1} & \binom{n}{n-1} & \cdots & \binom{2n-3}{n-1} & \binom{2n-2}{n-1} \\ \binom{n}{n} & \binom{n+1}{n} & \cdots & \binom{2n-2}{n} & \binom{2n-1}{n} \end{vmatrix}_{n}.$$

C'est-à-dire : $T_n=T_{n-1}$.

Comme $T_0=1$, on en déduit bien, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $T_n=1$.

3. On a aussi : $$T_n=\begin{vmatrix} \frac{0!}{0!0!} & \frac{1!}{0!1!} & \cdots & \frac{(n-1)!}{0!(n-1)!} & \frac{n!}{0!n!} \\ \frac{1!}{1!0!} & \frac{2!}{1!1!} & \cdots & \frac{n!}{1!(n-1)!} & \frac{(n+1)!}{1!n!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{(n-1)!}{(n-1)!0!} & \frac{n!}{(n-1)!1!} & \cdots & \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} & \frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!} \\ \frac{n!}{n!0!} & \frac{(n+1)!}{n!1!} & \cdots & \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} & \frac{(2n)!}{n!n!} \end{vmatrix}_{n+1}$$

D'où, par linéarité sur les lignes et sur les colonnes :

$$T_n=\frac{1}{\left(\prod_{k=0}^{n}k!\right)^2}\begin{vmatrix} 0! & 1! & \cdots & (n-1)! & n! \\ 1! & 2! & \cdots & n! & (n+1)! \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ (n-1)! & n! & \cdots & (2n-2)! & (2n-1)! \\ n! & (n+1)! & \cdots & (2n-1)! & (2n)! \end{vmatrix}_{n+1} = \frac{D_n}{\left(\prod_{k=0}^{n}k!\right)^2}.$$

D'où, avec **2.** : $D_n=\left(\prod_{k=0}^{n}k!\right)^2$.

Exercice 7

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $A=\left[\min(i,j)\right]_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$.

1. Calculer le déterminant de A.

2. Si A est inversible, calculer son inverse.

a. On a :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ \vdots \\ L_n \leftarrow L_n - nL_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1-n & 2-n & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \\ \vdots \\ L_{n-1} \leftrightarrow L_n}}{=} (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1-n & 2-n & \cdots & -1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

d'où $\det(A) = 1$.

b. La matrice A est bien inversible. Pour calculer A^{-1}, on résout le système : $(\mathrm{S}) : \begin{cases} x_1 + \cdots + x_n = y_1 \\ x_1 + 2x_2 + \cdots + 2x_n = y_2 \\ \quad \vdots \\ x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = y_n \end{cases}$.

Pour cela, introduisons les inconnues auxiliaires : $z_1 = x_1 + \cdots + x_n$, $z_2 = x_2 + \cdots + x_n$, …, $z_n = x_n$.

On a alors : $(\mathrm{S}) \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_1 + z_2 = y_2 \\ \quad \vdots \\ z_1 + z_2 + \cdots + z_n = y_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = y_2 - y_1 \\ \quad \vdots \\ z_n = y_n - y_{n-1} \end{cases}$,.

ce qui donne : $(\mathrm{S}) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \cdots + x_n = y_1 \\ x_2 + \cdots + x_n = y_2 - y_1 \\ \quad \vdots \\ x_n = y_n - y_{n-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2y_1 - y_2 \\ x_2 = -y_1 + 2y_2 - y_3 \\ \quad \vdots \\ x_n = y_n - y_{n-1} \end{cases}$.

Il en résulte que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & (0) \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ (0) & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Remarque : l'astuce utilisée revient à remarquer que $A = {}^tB\,B$

où $B = \begin{bmatrix} 1 & & (1) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{bmatrix}$ et $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & (0) \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ (0) & & & 1 \end{bmatrix}$, puis $A^{-1} = B^{-1}\,{}^t\!\left(B^{-1}\right)$.

Exercice 8 (partiel)

Calculer :

$$\begin{vmatrix} a+b & b & \cdots & \cdots & b \\ b & a+b & b & & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & \cdots & b & a+b \end{vmatrix}.$$

Corrigé (à lire après avoir vu le chapitre réduction)

Cet exercice se traite comme le N°9, qui a été fait en classe. Voivi une solution alternative utilisant le chapitre réduction :

Si $b=0$, $\begin{vmatrix} a+b & b & \cdots & \cdots & b \\ b & a+b & b & & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & \cdots & b & a+b \end{vmatrix}$ est évidemment égal à a^n ; supposons désormais b non nul,

et posons $B=\begin{pmatrix} b & b & \cdots & b \\ b & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & b \end{pmatrix}$. Il est clair que B est de rang 1, elle possède donc 0 pour valeur propre, et

$\dim E_0(B)=n-1$. De plus, $B=\begin{pmatrix} b & b & \cdots & b \\ b & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=nb\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$, donc nb est valeur propre de B, et ,

comme les dimensions des sous – espaces propres sont inférieures ou égales aux mulitplicités dans χ_B des valeurs propres correspondantes, et que la somme de ces multiplicité est elle – même inférieure ou égale à n : il n'y a pas d'autre valeur propre, 0 est racine de muliplicité $n-1$ de χ_B, et nb est racine de multiplicité 1 de χ_B.

Ainsi, $\chi_B=(-X)^{n-1}(nb-X)$.

On a $\begin{vmatrix} a+b & b & \cdots & \cdots & b \\ b & a+b & b & & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & \cdots & b & a+b \end{vmatrix}=\chi_B(-a)$, et $\boxed{\begin{vmatrix} a+b & b & \cdots & \cdots & b \\ b & a+b & b & & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & \cdots & b & a+b \end{vmatrix}=a^{n-1}(nb+a)}$.

Autre méthode

Posons $P(X)=\begin{vmatrix} a+X & X & \cdots & \cdots & X \\ X & a+X & X & & \vdots \\ \vdots & X & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & X \\ X & \cdots & \cdots & X & a+X \end{vmatrix}$. P est un polynôme, et, en retranchant à chaque colonne la précédente, puis en développant par rapport à la première d'entre elles, on se convainc qu'il est de degré inférieur ou égal à 1. Posons alors $P=\alpha X+\beta$. Si $a=0$, P est évidemment le polynôme nul.

Si $a\neq 0$, les relations $P(0)=a^n$ et $P\left(-\frac{a}{n}\right)=0$ (somme des colonnes du déterminant correspond nulle)

donnent $\beta=a^n$ et $-\frac{a\alpha}{n}+\beta=0$. On en déduit que $P=na^{n-1}X+a^n$ (même si $a=0$).

Finalement, $\boxed{\begin{vmatrix} a+b & b & \cdots & \cdots & b \\ b & a+b & b & & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & \cdots & b & a+b \end{vmatrix} = P(b) = n a^{n-1} b + a^n}$.

Exercice 12

Soient $n \geq 2$, et a, b, c trois nombres complexes. Calculer le déterminant $D_n(a,b,x) = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ b & x & a & \cdots & a \\ b & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & a \\ b & b & \cdots & b & x \end{vmatrix}$:

1. Lorsque $a \neq b$.

2. Lorsque $a = b$.

1) Fixons a,b,x. Nous allons calculer D_n par récurrence sur n. D'abord, $D_1 = x$ et $D_2 = x^2 - ab$. Supposons $n \geqslant 3$. Dans D_n, retranchons la deuxième colonne de la première. Il vient:

$$D_n = \begin{vmatrix} x-a & a & a & \dots & a \\ b-x & x & a & \dots & a \\ 0 & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & a \\ 0 & b & \dots & b & x \end{vmatrix} = (x-a)D_{n-1} + (x-b)\Delta,$$

en notant Δ le déterminant suivant, de taille $n-1$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a & a & \dots & a \\ b & x & a & \dots & a \\ b & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & a \\ b & b & \dots & b & x \end{vmatrix}$$

Le déterminant Δ ne diffère de D_{n-1} que par le terme d'indices $(1,1)$. En développant Δ par rapport à sa première ligne, il vient donc:

$$\Delta = D_{n-1} - (x-a)D_{n-2},$$

d'où:

$$D_n = (2x-a-b)D_{n-1} - (x-a)(x-b)D_{n-2}. \qquad (*)$$

Cette égalité est vraie lorsque $n \geqslant 3$ mais, en posant $D_0 = 1$, elle reste vraie lorsque $n = 2$. Nous avons ainsi obtenu une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. Le polynôme associé à cette relation de récurrence est:

$$P = X^2 - (2x-a-b)X + (x-a)(x-b) = [X-(x-a)][X-(x-b)].$$

Distinguons alors deux cas, suivant que $a \neq b$ ou $a = b$. Si $a \neq b$, le polynôme P possède deux racines distinctes, à savoir $x - a$ et $x - b$. On sait alors qu'il existe deux nombres complexes λ,μ tels que l'on ait, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$D_n \;=\; \lambda(x-a)^n + \mu(x-b)^n.$$

En prenant $n = 0$ et $n = 1$, on obtient le système linéaire:

$$\lambda + \mu \;=\; 1, \quad \lambda(x-a) + \mu(x-b) \;=\; x.$$

C'est un système de Cramer, dont la solution est donnée par:

$$\lambda \;=\; \frac{b}{b-a} \quad \text{et} \quad \mu \;=\; \frac{a}{a-b}\cdot$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient donc la formule suivante:

$$D_n(a,b,x) \;=\; \frac{a(x-b)^n - b(x-a)^n}{a-b} \quad (a \neq b).$$

Passons au cas où $a = b$. Par définition, $D_0(a,a,x) = 1$. Supposons $n \geqslant 1$. On peut raisonner par continuité en remarquant que, si n,a et x sont fixés, $D_n(a,b,x)$ est une fonction continue (car polynomiale) de b. D'où:

$$D_n(a,a,x) \;=\; \lim_{b \to a} \frac{b(x-a)^n - a(x-b)^n}{b-a}\cdot$$

Considérons la fonction $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(b) = b(x-a)^n - a(x-b)^n$. Puisque $f(a) = 0$, la limite ci-dessus n'est autre que $f'(b)$, c'est-à-dire $(x-a)^n + na(x-a)^{n-1}$, d'où:

$$D_n(a,a,x) \;=\; (x-a)^{n-1}\big(x + (n-1)a\big) \quad (n \geqslant 1).$$

On peut retrouver ce résultat différemment. Lorsque $a = b$, le polynôme P possède une racine double, à savoir $x - a$. On sait alors qu'il existe deux nombres complexes λ,μ tels que l'on ait, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$D_n \;=\; (\lambda n + \mu)(x-a)^n.$$

En prenant $n = 0$ puis $n = 1$, on obtient $\mu = 1$ et $(\lambda + \mu)(x-a) = x$. Il est clair que $D_n(a,a,a) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$. Supposons que x soit distinct de a. Dans ce cas, $\lambda = a/(x-a)$ d'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$D_n(a,a,x) \;=\; (x-a)^n\left[1 + \frac{na}{x-a}\right] \;=\; (x-a)^{n-1}\big((x-a) + na\big),$$

2) Indiquons une autre méthode pour calculer $D_n(a,b,x)$ lorsque $a \neq b$. Supposons $n \geqslant 3$. Dans D_n, retranchons la deuxième colonne de la première, puis la troisième de la deuxième, et ainsi de suite. Il vient:

$$D_n = \begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 & \dots & a \\ b-x & x-a & 0 & \dots & a \\ 0 & b-x & x-a & \dots & a \\ 0 & \dots & \ddots & x-a & a \\ 0 & 0 & \dots & b-x & x \end{vmatrix}.$$

Développons par rapport à la première ligne, en remarquant que le cofacteur d'indices $(1,1)$ n'est autre que D_{n-1}. Il vient:

$$D_n = (x-a)D_{n-1} + (-1)^{n-1}a(b-x)^{n-1} = (x-a)D_{n-1} + a(x-b)^{n-1}.$$

Si l'on échange a et b, D_n ne change pas (une matrice carrée et sa transposée ont même déterminant). D'où $D_n = (x-b)D_{n-1} + b(x-a)^{n-1}$. Par différence, il vient:

$$(a-b)D_{n-1} = a(x-b)^{n-1} - b(x-a)^{n-1},$$

Indiquons de même une autre méthode pour calculer $D_n(a,a,x)$ lorsque $n \geqslant 1$. Soit $J \in M_n(\mathbb{C})$ la matrice dont tous les coefficients valent a. On a $\operatorname{rang}(J) \leqslant 1$ et $\operatorname{Tr}(J) = na$, donc le polynôme caractéristique de J est:

$$\det(XI_n - J) = X^{n-1}(X - na).$$

D'où:

$$\begin{aligned} D_n(a,a,x) = \det\big(J + (x-a)I_n\big) &= (-1)^n \det\big((a-x)I_n - J\big) \\ &= (-1)^n(a-x)^{n-1}(a-x-na) = (x-a)^{n-1}\big(x+(n-1)a\big), \end{aligned}$$

Exercice 13

Soient $n \geq 2$, et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. Calculer le déterminant :

$$D = \begin{vmatrix} a_1 + a_2 & \cdots & a_{n-1} + a_n & a_n + a_1 \\ a_1^2 + a_2^2 & \cdots & a_{n-1}^2 + a_n^2 & a_n^2 + a_1^2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^n + a_2^n & \cdots & a_{n-1}^n + a_n^n & a_n^n + a_1^n \end{vmatrix}.$$

Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, notons $C_j \in K^n$ le vecteur colonne de composantes $a_j, a_j^2, \dots, a_j^n$. Le déterminant donné s'écrit alors.

$$D = \det(C_1 + C_2, C_2 + C_3, \dots, C_{n-1} + C_n, C_n + C_1).$$

Par linéarité par rapport à la première colonne, le dernier déterminant s'écrit comme somme $D = \Delta + \Delta'$, en posant:

$$\begin{cases} \Delta = \det(C_1, C_2 + C_3, \dots, C_{n-1} + C_n, C_n + C_1) \\ \Delta' = \det(C_2, C_2 + C_3, \dots, C_{n-1} + C_n, C_n + C_1). \end{cases}$$

Le caractère multilinéaire alterné du déterminant donne de façon immédiate:

$$\Delta = \det(C_1, C_2, \ldots, C_n) \quad \text{et} \quad \Delta' = \det(C_2, C_3, \ldots, C_n, C_1).$$

En fait, Δ' se déduit de Δ en effectuant sur les colonnes la permutation circulaire $(1\ 2\ \cdots\ n)$, et donc $\Delta' = (-1)^{n-1}\Delta$. D'où:

$$D = \left[1 + (-1)^{n-1}\right]\Delta.$$

Quant à Δ, il se déduit du déterminant Vandermonde $V(a_1, \ldots, a_n)$,

On en déduit :

$$D = \left[1 + (-1)^{n-1}\right] a_1 a_2 \cdots a_n \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

Exercice 14

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et soient $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, $z = e^{\frac{i\pi}{n}}$.

On pose
$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{(n-1)} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)^2} \end{vmatrix}.$$

1. Montrer qu'un argument de D est $\dfrac{\pi(n-1)(3n-2)}{4}$.

2. Calculer D^2, et en déduire D.

1.

$D = V(1, \omega, \ldots, \omega^{n-1})$ est le déterminant de Vandermonde des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité $1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}$. En particulier, $D \neq 0$ et

$$D = \prod_{0 \leqslant j < k \leqslant n-1} (\omega^k - \omega^j).$$

Posons $\theta = \pi/n$. Soient $j, k \in [\![0, n-1]\!]$ tels que $j < k$. On écrit:

$$\begin{aligned} \omega^k - \omega^j &= z^{2k} - z^{2j} = z^{j+k}\left(z^{k-j} - z^{j-k}\right) \\ &= z^{j+k}\left(e^{(k-j)i\theta} - e^{(j-k)i\theta}\right) = 2iz^{j+k}\sin\big((k-j)\theta\big). \end{aligned}$$

D'où:

$$D = (2i)^{n(n-1)/2}\, z^S \prod_{0 \leqslant j < k \leqslant n-1} \sin\big((k-j)\theta\big).$$

Dans le second membre de cette égalité, S désigne la somme:

$$S = \sum_{0 \leqslant j < k \leqslant n-1} (j+k) = \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} (j+k) = \sum_{j \neq k} j$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} j \left(\sum_{k \neq j} 1 \right) = (n-1) \sum_{j=0}^{n-1} j = \frac{n(n-1)^2}{2}.$$

Ainsi, $z^S = i^{(n-1)^2}$, d'où:

$$D = 2^{n(n-1)/2} i^{(n-1)(3n-2)/2} \prod_{0 \leqslant j < k \leqslant n-1} \sin\big((k-j)\theta\big).$$

Dans le produit figurant dans le second membre, tous les sinus sont positifs, et l'on en déduit l'argument de D:

$$\frac{D}{|D|} = i^{(n-1)(3n-2)/2}. \qquad (*)$$

Un argument de D est donc $\pi(n-1)(3n-2)/4$.

Si $k \in \mathbb{Z}$

n'est pas multiple de n, on a donc $\omega^k \neq 1$, d'où:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{jk} = \frac{\omega^{nk} - 1}{\omega^k - 1} = 0. \qquad (**)$$

Bien entendu, si $k \in \mathbb{Z}$ est multiple de n, le premier membre de cette égalité vaut n. Pou tous $j,k \in [\![1,n]\!]$, posons $a_{j,k} = \omega^{(j-1)(k-1)}$, et soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{C})$. Par définition $D = \det A$, donc $D^2 = \det(A^2)$. Il se trouve que la matrice A^2 est simple à explicite Soit $b_{j,k}$ son terme général. Si $j,k \in [\![1,n]\!]$, il vient:

$$b_{j,k} = \sum_{p=1}^{n} a_{j,p} a_{p,k} = \sum_{p=1}^{n} \omega^{(p-1)(j+k-2)}.$$

Compte tenu de la formule $(**)$, $b_{j,k}$ vaut n si $j+k-2$ est multiple de n et 0 sinon. En fait, puisque $0 \leqslant j+k-2 \leqslant 2n-2$, l'entier $j+k-2$ est multiple de n si et seulement si ou bien $j = k = 1$, ou bien $j \geqslant 2$ et $k = n+2-j$.

$$A^2 = n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

En développant le déterminant de M^2 par rapport à sa première colonne, on obtient ceci:

$$D^2 = n^n (-1)^{(n-1)(n-2)/2} = n^n (-1)^{(n-1)(3n-2)/2},$$

On en déduit D :

$$D = \pm n^{n/2} i^{(n-1)(3n-2)/2}.$$

Compte tenu de la formule $(*)$, le signe doit être $+$, d'où:

$$D = n^{n/2} i^{(n-1)(3n-2)/2}.$$

Exercice 15

a. Calculer le déterminant : $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$.

b. Dans quelle mesure le résultat trouvé se généralise – t – il ?

a. Notons $P_k = (X + k - 1), k \in \ 1, 4 \ $. Ces polynômes sont dans $\mathbb{R}_2[X]$, donc la famille $(P_k)_{k \in \ 1, 4}$ est liée. Considérons des réels $\lambda_1, ..., \lambda_4$ non tous nuls et tels que $\sum_{k=1}^{4} \lambda_k P_k = 0$.

Soit A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1(a) & P_2(a) & P_3(a) & P_4(a) \\ P_1(b) & P_2(b) & P_3(b) & P_4(b) \\ P_1(c) & P_2(c) & P_3(c) & P_4(c) \\ P_1(d) & P_2(d) & P_3(d) & P_4(d) \end{pmatrix}.$$

Les colonnes $C_1, ..., C_4$ de A sont liées par la relation de dépendance linéaire $\sum_{k=1}^{4} \lambda_k C_k = 0$,

donc $\boxed{\text{le déterminant } \Delta = \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = \det A \text{ est nul}}$.

b. Par un raisonnement similaire au précédent, on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $(x_1, ..., x_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2}$, le déterminant $\begin{vmatrix} x_1^n & (x_1+1)^n & \cdots & (x_1+n+1)^n \\ x_2^n & (x_2+1)^n & \cdots & (x_2+n+1)^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n+2}^n & (x_{n+2}+1)^n & \cdots & (x_{n+2}+n+1)^n \end{vmatrix}$ est nul.

Exercice 16

Pour $n \in \mathbb{N}$, on calculer le déterminant tridiagonal d'ordre n suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}.$$

On a $\Delta_0 = 1$ et $\Delta_1 = 2\cos\theta$.

Pour $n \geq 2$, on obtient en développant Δ_n par rapport à sa première ligne :

$\Delta_n = 2\cos\theta \,.\, \Delta_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2\cos\theta & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$, puis en développant cet autre déterminant par rapport à sa première colonne, $\Delta_n = 2\cos\theta \,.\, \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$.

La suite (Δ_n) est donc récurrente linéaire d'ordre 2. Le polynôme caractéristique associé à la relation de récurrence, $X^2 - 2\cos\theta \,.\, X + 1$, admet pour racines $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$, racines qui sont distinctes dès lors que $\theta \not\equiv 0\,[\pi]$. Par conséquent :

- Si $\theta \not\equiv 0\,[\pi]$, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_n = A\,e^{in\theta} + B\,e^{-in\theta}$.

  Les valeurs de Δ_0 et Δ_1 imposent les conditions $\begin{cases} A + B = 1 \\ A\,e^{i\theta} + B\,e^{-i\theta} = 2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta} \end{cases}$,

  d'où l'on déduit que $A = \dfrac{e^{i\theta}}{2i\sin\theta}$, $B = -\dfrac{e^{-i\theta}}{2i\sin\theta}$, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

  $\boxed{\Delta_n = \dfrac{e^{i\theta}}{2i\sin\theta}e^{in\theta} - \dfrac{e^{-i\theta}}{2i\sin\theta}e^{-in\theta} = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}}$.

- • Si $\theta \equiv 0\,[2\pi]$, alors il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_n = A + B\,n$. On a ici

  Les valeurs de $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = 2$; on en tire $A = B = 1$, et ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\Delta_n = n + 1}$.

  De même, si $\theta \equiv \pi\,[2\pi]$, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_n = (A + B\,n)(-1)^n$.

  Les conditions initiales donnent encore $A = B = 1$, et l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\Delta_n = (n+1)(-1)^{n+1}}$.

Remarque

Notons $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; on a calculé ici $\chi_A(-2\cos\theta)$. La matrice A_n revient dans une multitude de sujets, on peut considérer ce qui la concerne comme faisant partie du cours.

En particulier, il est de bon ton de savoir déterminer ses valeurs propres (même si ce n'est pas si évident que ça).

Valeurs propres de A_n

Notons déjà que celles – ci sont toutes dans $\mathbb{R}$, puisque A_n est symétrique réelle.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. On a $A_n X = \lambda X$ si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{r} -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - \lambda x_3 + x_4 = 0 \\ \vdots \\ x_{n-2} - \lambda x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_{n-1} - \lambda x_n = 0 \end{array} \right. .$$

Une astuce classique consiste alors à poser $x_0 = x_{n+1} = 0$. Ainsi, $A_n X = \lambda X$ est vérifié si et seulement la suite $(x_k)_{k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket}$ satisfait la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$(*) \quad \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket , \; x_k - \lambda x_{k+1} + x_{k+2} = 0.$$

Le discriminant du polynôme caractéristique de cette relation de récurrence est $\Delta = \lambda^2 - 4$; on distingue alors trois cas:

Si $\lambda = \pm 2$

Alors, $(*)$ implique l'existence de deux constantes A, B telles que pour tout $k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, $x_k = A + kB$ (si $\lambda = 2$) ou $x_k = (A + kB)(-1)^k$ (si $\lambda = -2$). Dans les deux cas, les conditions $x_0 = x_{n+1} = 0$ imposent $A = B = 0$. Par conséquent, $A_n X = \pm 2 X$ entraîne $X = 0$, ce qui signifie que 2 et -2 ne sont pas valeurs propres de A.

Si $|\lambda| > 2$

Alors $(*) \Rightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2$, $\forall k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, $x_k = A\alpha_1^k + B\alpha_2^k$, où $\alpha_1 = \dfrac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$ et $\alpha_2 = \dfrac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$. Les conditions $x_0 = x_{n+1} = 0$ imposent $\left\{ \begin{array}{l} A + B = 0 \\ A\alpha_1^{n+1} + B\alpha_2^{n+1} = 0 \end{array} \right.$, soit : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1^{n+1} & \alpha_2^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0$. Comme $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1^{n+1} & \alpha_2^{n+1} \end{vmatrix} = \alpha_2^{n+1} - \alpha_1^{n+1} \neq 0$, ce système est de Cramer, et sa seule solution est la solution nulle. Ainsi, $A_n X = \lambda X \Rightarrow X = 0$, et A n'admet pas de valeur propre de valeur absolue strictement supérieure à 2.

Si $|\lambda| < 2$

On peut alors poser $\lambda = 2\cos\alpha$, avec $\alpha \in \left]0, \pi\right[$. Avec cette notation, les racines de $X^2 - \lambda X + 1$ sont $e^{i\alpha}$ et $e^{-i\alpha}$, donc $(*) \Rightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2$, $\forall\ k \in\ 0, n+1\ $, $x_k = A\cos(k\alpha) + B\sin(k\alpha)$. Les conditions $x_0 = x_{n+1} = 0$ imposent maintenant $\left\{\begin{array}{r} A = 0 \\ B\cos\left((n+1)\alpha\right) = 0 \end{array}\right.$, système qui admet une solution non nulle si et seulement si $\sin\left((n+1)\alpha\right) = 0$, soit (puisque $\alpha \in \left]0, \pi\right[$) si et seulement si $\alpha = \dfrac{s\pi}{n+1}$, $s \in\ 1, n\ $.

Par conséquent, A_n admet pour valeurs propres les réels $\lambda_s = 2\cos\left(\dfrac{s\pi}{n+1}\right)$, $s \in\ 1, n\ $, ce qui lui fait n valeurs propres distinctes. Ses sous – espaces propres sont donc tous de dimension 1, ce qui précède permet d'ailleurs de les déterminer : pour tout $s \in\ 1, n\ $, $E_{\lambda_s}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} \sin\left(\dfrac{s\pi}{n+1}\right) \\ \sin\left(\dfrac{2s\pi}{n+1}\right) \\ \vdots \\ \left(\dfrac{ns\pi}{n+1}\right) \end{pmatrix}\right)$.

Exercice 19

Soit $n \geq 2$, et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Notons r son rang, et A sa comatrice, définie par : $A_{i,j} = A_{i,j}$, $A_{i,j}$ étant le cofacteur de $a_{i,j}$ dans la matrice A.

1. Prouver que ${}^t A\, A = A\, {}^t A = \det(A) . I_n$.

2. Calculer le rang et le déterminant de A.

1. (Non corrigé). Ecrire la formule du produit matriciel…
2. • Si M est de rang n, elle est inversible, et $\det(M) \neq 0$. La relation

$$M . {}^t\text{com}(M) = {}^t\text{com}(M) . M = \det(M) . I_n$$

prouve alors que $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)} . {}^t\text{com}(M)$: par conséquent, ${}^t\text{com}(M)$ est inversible, et alors

$$\boxed{\text{rang}\left(\text{com}(M)\right) = \text{rang}\left({}^t\text{com}(M)\right) = n}.$$

• • Si $\text{rang}(M) < n$, alors $\det(M) = 0$, et l'on a $M . {}^t\text{com}(M) = {}^t\text{com}(M) . M = 0$.

Dans ce cas, $\text{Im}\left({}^t\text{com}(M)\right) \subset \text{Ker}(M)$, donc si $\text{rang}(M) = n - 1$, alors $\text{rang}\left(\text{com}(M)\right) \leq 1$.

D'autre part, dire que $\text{rang}(M) = r$, c'est dire qu'il existe un bloc extrait de M de taille $r \times r$ qui est inversible, et que tout bloc extrait de taille supérieure est non inversible. Donc :

- Si $\text{rang}(M) = n - 1$, il existe au moins un bloc extrait de M de taille $(n-1)\times(n-1)$ qui est inversible. Son déterminant est alors non nul, donc $\text{com}(M)$ possède au moins un coefficient non nul.

Ceci, joint à l'inégalité $\text{rang}(\text{com}(M)) \leq 1$, assure que $\boxed{\text{rang}(\text{com}(M)) = 1}$.

∘ ∘ Si $\text{rang}(M) < n-1$, tout bloc extrait de M de taille $(n-1)\times(n-1)$ est

de déterminant nul, et $\text{com}(M)$ est la matrice nulle, d'où bien sûr $\boxed{\text{rang}(\text{com}(M)) = 0}$.

Exercice 23*

1. Soient $a_1,\ldots,a_p$ des réels deux à deux distincts, et $t_1,\ldots,t_p$ des réels non tous nuls ($p \geq 1$). Montrer, par récurrence, que la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par la formule : $f(x) = t_1 x^{a_1} + t_2 x^{a_2} + \ldots + t_p x^{a_p}$ s'annule au plus $p-1$ fois sur $]0,+\infty[$.

Hint : on pourra considérer la fonction $t \mapsto t_1 x^{a_1 - a_{p+1}} + t_2 x^{a_2 - a_{p+1}} + \ldots + t_p x^{a_p - a_{p+1}} + t_{p+1}$.

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1,\ldots,a_n$, $x_1,\ldots,x_n$ vérifiant les conditions :

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n \text{ et } 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n.$$

Montrer que le déterminant $D = \begin{vmatrix} x_1^{a_1} & x_2^{a_1} & \cdots & x_n^{a_1} \\ x_1^{a_2} & x_2^{a_2} & \cdots & x_n^{a_2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{a_n} & x_2^{a_n} & \cdots & x_n^{a_n} \end{vmatrix}$ est strictement positif.

On pourra là encore raisonner par récurrence, et faire varier x_n.

1) Raisonnons par récurrence sur p. Le cas $p=1$ est évident, car alors $f(x) = t_1 x^{a_1} \neq 0$ pour tout $x > 0$, puisque t_1 n'est pas nul. Supposons notre assertion vraie jusqu'à l'ordre $p-1$, pour un certain entier $p \geqslant 2$. Soient $t_1,\ldots,t_p$ et $a_1,\ldots,a_p$ comme dans l'énoncé. Si l'un des t_i est nul, il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence pour conclure. Supposons donc que les t_i soient tous non nuls. Quitte à remplacer les a_i par $a_i - a_p$, on peut supposer que $a_p = 0$, auquel cas $a_1,\ldots,a_{p-1}$ sont non nuls. La fonction f est de classe C^∞, et sa dérivée est donnée par la formule:

$$f'(x) = t_1 a_1 x^{a_1 - 1} + t_2 a_2 x^{a_2 - 1} + \cdots + t_{p-1} a_{p-1} x^{a_{p-1} - 1}.$$

La fonction f' est donc du même type que f, en remplaçant p par $p-1$. D'après l'hypothèse de récurrence, f' s'annule au plus $p-2$ fois sur $]0,+\infty[$. En vertu du théorème de Rolle, la fonction f s'annule donc au plus $p-1$ fois sur $]0,+\infty[$.

2) Raisonnons donc par récurrence sur n. Si $n=1$, on a $D = x_1^{a_1} > 0$. Supposons la conclusion vraie à l'ordre $n-1$, pour un certain entier $n \geqslant 2$, et soient $x_1,\ldots,x_n$, $a_1,\ldots,a_n$ comme dans l'énoncé. Pour tout réel $x > 0$, notons $f(x)$ le déterminant obtenu en remplaçant x_n par x dans la dernière colonne de D. La fonction f est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$. Plus précisément, en développant le déterminant définissant $f(x)$ par rapport à sa dernière colonne, il vient (pour tout $x > 0$):

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+i} k_i x^{a_i}. \qquad (*)$$

Dans le second membre, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, le coefficient k_i est le mineur obtenu en supprimant la ligne d'indice i et la colonne d'indice n dans ledit déterminant. En particulier, k_n est un déterminant du même type que D, mais de taille $n-1$. Ainsi, $k_n > 0$, vu l'hypothèse de récurrence. Appliquons maintenant la question 1) à la fonction f, ce qui est loisible puisque les a_i sont deux à deux distincts et les k_i sont non tous nuls. La fonction f s'annule donc au plus $n-1$ fois sur $]0,+\infty[$. Mais il est clair que $f(x_i) = 0$ pour $i = 1,\dots,n-1$, car le déterminant définissant $f(x_i)$ possède deux colonnes égales. En conclusion, f s'annule en $x_1,\dots,x_{n-1}$, et en ces points seulement.

Puisque f ne s'annule pas sur $]x_{n-1},+\infty[$, elle garde sur cet intervalle un signe constant. Or, lorsque x tend vers $+\infty$, la formule $(*)$ donne l'équivalent $f(x) \sim k_n x^{a_n}$, puisque par hypothèse $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Le signe en question est donc $+$, et en particulier $D = f(x_n) > 0$.