Lycée Lakanal

2024 - 2025

PC

# *Liste d'exercices – Suites et séries de fonctions*

## *Des corrigés*

### Exercice 3

Soient $z \in \mathbb{C}^*$, et $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $r \neq |z|$. A l'aide d'un développement en série, calculer $I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{z - r\,\mathrm{e}^{ix}}$.

On distingue deux cas :

***Premier cas,*** .

On écrit alors que pour tout $x \in [0, 2\pi]$, $\frac{1}{z - r\,\mathrm{e}^{ix}} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{r}{z}\mathrm{e}^{ix}}$, puis en utilisant une série géométrique de raison

(donc convergente, puisque $\left|\frac{r}{z}\mathrm{e}^{ix}\right| = \frac{r}{|z|} < 1$) : $\forall\, x \in [2, \pi]$, $\frac{1}{z - r\,\mathrm{e}^{ix}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{r}{z}\right)^n \mathrm{e}^{inx}$.

On a donc $I = \frac{1}{z} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$, où  est la fonction $x \mapsto \left(\frac{r}{z}\right)^n \mathrm{e}^{inx}$.

Les fonctions $f_n$ sont continues, et la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$ : en effet, pour tout

$x \in [0, 2\pi]$, $|f_n(x)| = \left(\frac{r}{|z|}\right)^n$, d'où $\|f_n\|_{\infty, [0, 2\pi]} = \left(\frac{r}{|z|}\right)^n$, et la série $\sum \left(\frac{r}{|z|}\right)^n$ converge).

On peut dès lors intégrer terme à terme : $I = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

On a $\int_0^{2\pi} f_0(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x = 2\pi$. Pour $n \geq 1$ : $\int_0^{2\pi} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{r}{z}\right)^n \left[\frac{\mathrm{e}^{inx}}{in}\right]_0^{2\pi} = 2\pi$. Finalement, .

***Deuxième cas,*** $r > |z|$.

On écrit alors que pour tout $x \in [0, 2\pi]$, $\frac{1}{z - r\,\mathrm{e}^{ix}} = -\frac{1}{r} \frac{\mathrm{e}^{-ix}}{1 - \frac{z}{r}\mathrm{e}^{-ix}}$, puis, à nouveau en utilisant un développement en

série géométrique, que $\frac{1}{z - r\,\mathrm{e}^{ix}} = -\frac{1}{r}\left(\frac{z}{r}\right)^n \mathrm{e}^{-i(n+1)x}$. Par des arguments analogues aux précédents, on peut intégrer terme

à terme, et l'on obtient : $I = -\frac{1}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{r}\right)^n \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-i(n+1)x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{r}\right)^n \left[\frac{\mathrm{e}^{-i(n+1)x}}{-in}\right]_0^{2\pi} = 0$.

### Exercice 4

Soit $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2 x + n}$.

**1.** Déterminer l'ensemble de définition de $S$.

**2.** Montrer que $S$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

**3.** Déterminer un équivalent de $S$ au voisinage de $0$.

**1.** On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{n^2 x + n}$. L'ensemble de définition de $f_n$ est $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\dfrac{1}{n} \right\}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions $f_n$ sont toutes définies en $x$ si et seulement si $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Supposons que tel soit le cas. Si $x = 0$, $\sum\limits_{n \geq 1} f_n(x)$ est la série harmonique $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{1}{n}$, qui est divergente. Sinon, on a $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2 x + n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2 x}$, et la convergence absolue de la série de Riemann $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ entraîne celle de la série $\sum\limits_{n \geq 1} f_n(x)$.

Ainsi, l'ensemble de définition de $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2 x + n}$ est $\mathbb{R} \setminus \left( \{0\} \cup \left\{ -\dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^* \right\} \right)$.

**2.** On a les résultats suivants :

***i –*** les fonctions $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{n^2 x + n}$ sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivées $f_n' : x \mapsto \dfrac{-1}{(n x + 1)^2}$.

***ii –*** D'après **Q1**, la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction $S$.

***iii –*** Pour tout $a > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [a, +\infty[$, $\left| f_n'(x) \right| \leq \dfrac{1}{(n a)^2}$, et la série de Riemann $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{1}{a^2 n^2}$ converge. La série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 1} f_n'$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a, +\infty[$.

D'après le théorème de dérivation d'une somme de série de fonctions, $S$ est de classe $C^1$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, $S$ est donc de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $S'(x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(n x + 1)^2}$.

**3.** Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $g_x : t \mapsto \dfrac{1}{t^2 x + t}$ est continue par morceaux, décroissante et positive sur $\mathbb{R}_+^*$, et l'on sait que la série $\sum\limits_{n \geq 1} g_x(n) = \sum\limits_{n \geq 1} f_n(x)$ est convergente, de somme $S(x)$. D'après le théorème de comparaison série/intégrale, l'intégrale $\int_1^{+\infty} g_x(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et l'on a l'encadrement :

$$\int_2^{+\infty} g_x(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=2}^{+\infty} g_x(t) \leq \int_1^{+\infty} g_x(t)\,\mathrm{d}t, \text{ soit : } \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 x + t} \leq S(x) - \frac{1}{x+1} \leq \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 x + t}.$$

On a $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 x + t} = \int_1^{+\infty} \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t + \frac{1}{x}} \right) \mathrm{d}t = \lim_{A \to +\infty} \left[ \ln\left( \frac{t}{t + \frac{1}{x}} \right) \right]_1^A = \ln\left( \frac{1}{x} + 1 \right)$, et

$\ln\left( \dfrac{1}{x} + 1 \right) = \ln(x+1) - \ln(x) \underset{x \to 0}{=} -\ln(x) + o(\ln(x))$. Un calcul analogue donne :

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 x + t} = \ln\left( \frac{1}{2x} + 1 \right) \underset{x \to 0}{=} -\ln(x) + o(\ln(x)).$$

On a donc l'encadrement : $-\ln(x) + \underset{x \to 0}{o}(\ln(x)) \leq S(x) - \underset{x \to 0}{o}(\ln(x)) \leq -\ln(x) + \underset{x \to 0}{o}(\ln(x))$, et l'on en conclut que $S(x) \underset{x \to 0}{\sim} -\ln(x)$.

## Exercice 5

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

**1.** Déterminer le domaine de définition $D_f$ de $f$.

**2.** Montrer (directement, ie. sans utiliser les résultats de **Q3.**) que $f$ est continue sur $D_f$.

**3.** Montrer que $f$ est de classe $C^\infty$ sur $D_f$.

**4.** Déterminer $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

**1.** Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+x}$. La fonction $f_n$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-n\}$.

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions $f_n$ sont toutes définies en $x$ si et seulement si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$.

Supposons que $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$. Si $x > 0$, la suite $\left(\frac{1}{n+x}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs positives, décroissante, et tend vers $0$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ ; d'après le théorème spécial des séries alternées, $\sum \frac{(-1)^n}{n+x}$ converge.

Si $x < 0$, la suite $\left(\frac{1}{n+x}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie encore les hypothèses du théorème spécial des séries alternées à partir d'un certain rang (explicitement, à partir du rang $N_x = -\lfloor x \rfloor + 1$), ce qui suffit à établir la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+x}$.

Finalement, l'ensemble de définition de $f$ est : $D_f = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$.

**2.** Montrons déjà que $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On sait déjà que $f$ est bien définie sur ce domaine, les fonctions restes d'ordre $n$ : $R_n : x \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+x}$ le sont donc aussi. Les fonctions $f_n$, $n \geq 1$ sont continues et bornées sur ce domaine. De plus, le théorème spécial des séries alternées assure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1+x}$. Donc $R_n$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\|R_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+^*} \leq \frac{1}{n+1}$, d'où $\lim_{n \to +\infty} \|R_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+^*} = 0$. Ainsi, la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$, sa somme $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ y est donc continue.

$f : x \mapsto \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ est donc elle aussi continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Montrons maintenant que $f$ est continue sur $D_f$. Soit $x \in D_f \cap \mathbb{R}_-$. On a $f = \sum_{n=0}^{N_x - 1} f_n + \sum_{n=N_x}^{+\infty} f_n$. La somme finie $\sum_{n=0}^{N_x - 1} f_n$ est évidemment continue sur $[-N_x, +\infty[ \cap D_f$. On montre comme précédemment que la série de fonctions

$\sum_{n=N_x} f_n$ converge uniformément sur ce domaine, et l'on en conclut, toujours comme précédemment, que $f$ est continue sur $\left[-N_x, +\infty\right[ \cap D_f$. Ainsi, $f$ est continue en $x$. Finalement, $f$ est bien continue sur $D_f$.

**3.** On va montrer que $f$ est $C^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (le caractère $C^\infty$ sur $D_f$ se prouverait de façon analogue, en mettant à part les premiers termes comme en fin de question **2.**). La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

Les fonctions $f_n$ sont de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$f_n^{(r)}(x) = \dfrac{(-1)^{n+r}\, r!}{(n+x)^{r+1}}$. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $a > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$\left|f_n^{(r)}(x)\right| \leq \dfrac{r!}{(n+a)^{r+1}}$, ainsi $\left\|f_n^{(r)}\right\|_{\infty,[a,+\infty[} \leq \dfrac{r!}{(n+a)^{r+1}}$. Or la série $\sum_{n \geq 0} \dfrac{r!}{(n+a)^{r+1}}$ converge (Riemann). $\sum_{n \geq 0} f_n^{(r)}$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a, +\infty[$, et $f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

**4.** On utilise dans le deux cas la majoration des restes donnée par le théorème spécial des séries alternées :

*Limite en* $+\infty$

Pour tout $x > 0$, $|f(x)| \leq \dfrac{1}{x}$. On a $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

*Limite en* $0^+$

Pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x} + R_0(x)$, avec $\|R_0\|_{\infty, \mathbb{R}_+^*} \leq 1$, et $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$. On en conclut que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

## Exercice 6

Calculer $I = \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x - n x)\, dx$. Remarquer que $I = \operatorname{Re}\left(\int_0^{2\pi} e^{e^{ix}} e^{-inx}\, dx\right)$, et développer $e^{e^{ix}}$ en série.

On a pour tout $x \in [0, 2\pi]$, $e^{\cos x} \cos(\sin x - n x) = e^{e^{ix}} e^{-inx}$, d'où, en utilisant une série exponentielle (convergente) :

$e^{\cos x} \cos(\sin x - n x) = e^{-inx} \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{e^{ikx}}{k!}$. Les fonctions $f_k : x \mapsto e^{-inx} \dfrac{e^{ikx}}{k!}$ sont continues sur le segment $[0, 2\pi]$ ; on a pour tout $x \in [0, 2\pi]$, $|f_k(x)| = \dfrac{1}{k!}$, d'où $\|f_k\|_{\infty,[0,2\pi]} = \dfrac{1}{k!}$ ; la série exponentielle $\sum \dfrac{1}{k!}$ converge, donc la série de fonctions $\sum f_k$ converge normalement (donc uniformément) sur $[0, 2\pi]$ : la série $\sum \int_0^{2\pi} f_k(x)\, dx$ converge, et l'on a

$$I = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} f_k(x)\, dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)}\, dx. \text{ On calcule : } \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)}\, dx = \begin{cases} 2\pi & \text{si } k = n \\ \left[\dfrac{e^{i(k-n)x}}{i(k-n)}\right]_0^{2\pi} = 0 & \text{si } k \neq n \end{cases},$$

d'où $I = 2\pi$.

## Exercice 7

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

**1.** Déterminer le domaine de définition de $f$. Montrer que $f$ est continue sur ce domaine.

**2.** Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.

**3.** Montrer, à l'aide d'une intégrale, que $f(x) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{2}{x^2}$.

**1.** *Domaine de définition :*

Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \leq 0$, la série $\sum e^{-x\sqrt{n}}$ est grossièrement divergente. Si $x > 0$, par croissances comparées :

$\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 e^{-x\sqrt{n}} = 0$. On a donc $e^{-x\sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ ; de la convergence absolue de la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$, on déduit la convergence de la série $\sum e^{-x\sqrt{n}}$. Ainsi, le domaine de définition de $f$ est $\mathbb{R}_+^*$.

*Continuité*

On a les résultats suivants :

*i*) – Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : x \mapsto e^{-x\sqrt{n}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

*ii*) – Pour tout $a > 0$ : pour tout $x \in [a, +\infty[$, $|f_n(x)| \leq e^{-a\sqrt{n}}$, et, d'après ce qui précède, la série $\sum e^{-a\sqrt{n}}$ converge. La série de fonctions $\sum f_n$ est alors normalement, donc uniformément convergente sur $[a, +\infty[$.

De ces résultats, on déduit que $f$ est continue sur $]a, +\infty[$, et ce pour tout $a > 0$. La fonction $f$ est donc continue sur $\bigcup\limits_{a > 0} ]a, +\infty[ = \mathbb{R}_+^*$.

**2.** On utilise une comparaison série/intégrale : soit $x$ un réel strictement positif fixé. La fonction $f_x : t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}$ est continue par morceaux, positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$ ; la série $\sum f_x(n) = \sum e^{-x\sqrt{n}}$ converge. On sait alors que $f_x$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, et que l'on a l'encadrement : $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\, dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}} \leq \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\, dt$. En utilisant le changement de variable (affine, donc licite) $u = x^2 t$, il vient : $\displaystyle\frac{1}{x^2}\int_{x^2}^{+\infty} e^{-\sqrt{u}}\, du \leq \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}} \leq \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{u}}\, du$.

On en déduit que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}} = 0$, et plus précisément que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}} \underset{x \to +\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

**3.** On utilise l'encadrement de la question précédente : $\displaystyle\frac{1}{x^2}\int_{x^2}^{+\infty} e^{-\sqrt{u}}\, du \leq \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}} \leq \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{u}}\, du$.

On a $\displaystyle\lim_{x \to 0} \int_{x^2}^{+\infty} e^{-\sqrt{u}}\, du = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{u}}\, du \neq 0$, d'où $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{u}}\, du$. Le changement de variable $v = \sqrt{u}$ ($C^1$, strictement croissant et bijectif de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même) donne : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{u}}\, du = \int_0^{+\infty} v\, e^{-v}\, dv$. On sait (et on redémontre facilement sur cet exemple, par une Ipp facile) que $\forall \lambda > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} v^n e^{-\lambda v}\, dv = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}$). Ici,

$\displaystyle\int_0^{+\infty} v\, e^{-v}\, dv = 2$, d'où $f(x) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{2}{x^2}$.

## Exercice 9

On pose lorsque c'est possible : $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,x\,\mathrm{e}^{-n x^2}$.

Existence, calcul, continuité, équivalent en $+\infty$. La convergence est – elle uniforme ?

On a bien sûr $F(0) = 0$. Pour $x \neq 0$, $F(x) = x\,\mathrm{e}^{-x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right)^{n-1}$ ; on reconnaît une série géométrique dérivée de raison $\mathrm{e}^{-x^2}$, avec $\left|\mathrm{e}^{-x^2}\right| < 1$ ; on retrouve ainsi la convergence de la série $\sum n\,x\,\mathrm{e}^{-n x^2}$, et l'on obtient sa somme :

$$F(x) = x\,\mathrm{e}^{-x^2} \frac{1}{\left(1 - \mathrm{e}^{-x^2}\right)^2}$$

que l'on arrange de la façon habituelle, en écrivant que $\boxed{F(x) = x\,\mathrm{e}^{-x^2} \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{\left(\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right)^2} = \frac{x}{4\,\mathrm{sh}^2\left(\frac{x^2}{2}\right)}}$.

***Continuité***

Il découle immédiatement de ce qui précède que $F$ est continue, et même de classe $C^\infty$, sur $\mathbb{R}^*$.

$F(x) \underset{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}}{\sim} \frac{1}{x^3}$, donc $\boxed{F \text{ n'est pas continue en } 0}$.

***Equivalent au voisinage de*** $+\infty$

$\boxed{F(x) = \frac{x}{4\,\mathrm{sh}^2\left(\frac{x^2}{2}\right)} \underset{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}}{\sim} x\,\mathrm{e}^{-x^2}}$ n'est pas bien dur non plus.

***Est – ce qu'il y a convergence uniforme***

Ça dépend sur quoi… Il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$, car sinon $F$ serait continue, comme somme d'une série uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ de fonctions continues.

Il y a convergence normale, donc uniforme, sur tout segment de $\mathbb{R}^*$, en effet pour tout $(a, b)$ tel que $0 < a < b$, pour tout $x \in [a, b]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq n\,x\,\mathrm{e}^{-n x^2} \leq n\,b\,\mathrm{e}^{-n a^2}$, et $\sum n\,b\,\mathrm{e}^{-n a^2}$ converge (c'est encore une série géométrique dérivée). Il y a donc bien convergence normale sur $[a, b]$, et, par imparité des fonctions $x \mapsto n\,x\,\mathrm{e}^{-n x^2}$, la convergence est aussi normale sur $[-b, -a]$.

## Exercice 11

Soit la série de fonctions $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$.

**1.** Montrer que $S$ définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

**2.** Soient $x > 0$ et $n \geq 1$. Justifier que $\int_n^{n+1} \frac{x}{x^2 + t^2}\,\mathrm{d}t \leq \frac{x}{x^2 + n^2} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{x}{x^2 + t^2}\,\mathrm{d}t$.

**3.** En déduire que $S$ admet une limite en $+\infty$, et la déterminer.

**1.** On a les résultats suivants :

**i –** les fonctions $f_n : x \mapsto \dfrac{x}{x^2 + n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, sont continues sur $\mathbb{R}$.

**ii –** Pour tout $a > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [-a, a]$, $\left| f_n(x) \right| \leq \dfrac{a}{n^2}$, et la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{a}{n^2}$ converge. La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[-a, a]$.

D'après le théorème de continuité d'une somme de série de fonctions, $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$ est définie et continue sur $[-a, a]$, et ce pour tout $a > 0$. Cela revient à dire que $S$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

**2.** La fonction $f_x : t \mapsto \dfrac{x}{x^2 + t^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, d'où l'encadrement :

$$\int_n^{n+1} \frac{x}{x^2 + t^2}\,\mathrm{d}t \leq \frac{x}{x^2 + n^2} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{x}{x^2 + t^2}\,\mathrm{d}t .$$

**3.** Pour $x > 0$, la fonction $f_x$ est continue par morceaux, décroissante, positive sur $\mathbb{R}_+$. Elle est de plus intégrable sur $\mathbb{R}_+$, avec : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_x(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2 + t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\arctan\left(\frac{t}{x}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$. D'après le théorème de comparaison série/intégrale, $\displaystyle\sum_{n \geq 1} f_x(n) = \sum_{n \geq 0} \frac{x}{x^2 + n^2}$ converge (ça on le savait), et l'on a

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2 + t^2}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + n^2} \leq \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2 + t^2}\,\mathrm{d}t \text{, soit : } \left[\arctan\left(\frac{t}{x}\right)\right]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \leq S(x) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Comme $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, on en déduit, par encadrement, que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} S(x) = \frac{\pi}{2}$ .

## Exercice 12

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n - x} - \frac{1}{n + x}\right)$. Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, et calculer cette intégrale.

Pour tout $n \geq 2$, on pose : $\forall\ x \in [0, 1]$, $f_n(x) = \dfrac{1}{n - x} - \dfrac{1}{n + x}$ .

Les fonctions $f_n$ sont continues sur $[0, 1]$, donc bornées sur ce segment ; on a pour tout $n \geq 2$, pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leq f_n(x) \leq \dfrac{1}{n - 1} - \dfrac{1}{n + 1}$, d'où $\| f_n \|_{\infty, [0,1]} \leq \dfrac{1}{n - 1} - \dfrac{1}{n + 1}$. Or la série $\displaystyle\sum \left(\frac{1}{n - 1} - \frac{1}{n + 1}\right)$ converge (par télescopage, ou parce que son terme général est équivalent à $\dfrac{2}{n^2}$).

Par conséquent, la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geq 2} f_n$ converge normalement sur $[0, 1]$. La fonction $f$ est donc définie, continue sur $[0, 1]$, et l'on peut permuter somme et intégrale : on a $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ .

Il en résulte que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{+\infty} \int_0^1 \left(\frac{1}{n - x} - \frac{1}{n + x}\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2}{(n - 1)(n + 1)}\right)$, reste à calculer cette somme.

On a pour tout $N \geq 2$, $\sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{n^2}{(n-1)(n+1)}\right) = \ln\left(\frac{\prod_{n=2}^{N} n^2}{\left(\prod_{n=2}^{N}(n-1)\right)\left(\prod_{n=2}^{N}(n+1)\right)}\right) = \ln\left(\frac{\prod_{n=2}^{N} n^2}{\left(\prod_{n=1}^{N-1} n\right)\left(\prod_{n=3}^{N+1} n\right)}\right)$,

puis par télescopage : $\sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{n^2}{(n-1)(n+1)}\right) = \ln\left(\frac{3N}{N+1}\right)$.

On en conclut que $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{N \to +\infty} \ln\left(\frac{3N}{N+1}\right) = \ln 3$.

## Exercice 13

On pose lorsque c'est possible : $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + n^4 x^2}$.

**a.** Domaine de définition et continuité de $f$.

**b.** Montrer que $f$ est $C^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

**c.** Calculer : $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(1 + x^2 t^2\right)^2}$.

**d.** Existence et valeur de $f'\left(0^+\right)$ et $f'\left(0^-\right)$ en fonction de ce qui précède.

**a.** Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^2 + n^4 x^2}$.

***Définition***

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|f_n(x)\right| \leq \frac{1}{n^2}$. Or, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. Donc, non seulement, pour $x$ fixé, $\sum f_n(x)$ converge (ce qui revient à dire que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$), mais en plus il y a convergence normale sur $\mathbb{R}$. Rien que la convergence simple prouve que $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$.

***Continuité***

On vient de dire que $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ ; de plus, les fonctions $f_n$ sont continues.

Alors, $\boxed{\text{la fonction somme } f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + n^4 x^2} \text{ est continue}}$.

**b.** On a déjà dit que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}^*$.

Les fonctions $f_n$ sont aussi de classe $C^1$, et l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = \frac{-2x}{\left(1 + n^2 x^2\right)^2}$.

Alors, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}_+^{*}$ et pour tout $x \in [a, b]$ ou pour tout $x \in [-b, -a]$, $\left|f_n'(x)\right| \leq \frac{2b}{\left(1 + n^2 a^2\right)^2}$ :

la série de fonctions $\sum f_n'$ converge donc normalement sur $[a, b]$ et sur $[-b, -a]$.

On en déduit que $\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^*}$, et l'on a : $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = -2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(1 + n^2 x^2\right)^2}}$.

**c.** On a, grâce à une intégration par parties que je ne détaille pas (précisons tout de même que toutes les fonctions mises en jeu sont de classe $C^1$, et que tous les objets mis en jeu convergent) :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2x^2} = \lim_{X\to+\infty} \int_1^X \left(1 . \frac{1}{1+t^2x^2}\right)\mathrm{d}t$$
$$= \lim_{X\to+\infty}\left(\left[\frac{t}{1+t^2x^2}\right]_{t=1}^{t=X} + \int_1^X \frac{2t^2x^2}{\left(1+t^2x^2\right)^2}\mathrm{d}t\right)$$
$$= \lim_{X\to+\infty}\left(\left[\frac{t}{1+t^2x^2}\right]_{t=1}^{t=X} + 2\int_1^X \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2x^2} - 2\int_1^X \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^2x^2\right)^2}\right),$$

d'où $\displaystyle \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2x^2} = -\frac{1}{1+x^2} + 2\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2x^2} - 2\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^2x^2\right)^2}$.

On en déduit que

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^2x^2\right)^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2x^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2x^2}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\frac{1}{x^2}+t^2}$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2x}\lim_{X\to+\infty}\left[\arctan(xt)\right]_1^{+\infty} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2x}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right).$$

**d.** Remarquons déjà que si $f$ est dérivable en $0$, pour des raisons de parité $f'(0)$ est nulle. Remarquons également que $f'$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ : cela peut se démontrer en re – dérivant $x \mapsto -2x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\left(1+n^2x^2\right)^2}$ terme à terme, mais on peut aussi y aller bravement à la main ; en effet, pour $x$, $y$ tels que $0 < x < y$,

$$f'(x) - f'(y) = -2x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\left(1+n^2x^2\right)^2} + 2y\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\left(1+n^2y^2\right)^2}$$
$$= 2(y-x)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+2n^2xy+n^4xy\left(x^2+xy+y^2\right)}{\left(1+n^2x^2\right)^2\left(1+n^2y^2\right)^2} > 0 :$$

Je sais, ce n'est pas bien beau.

Bien, on reprend : $f'$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, majorée sur $\mathbb{R}_+^*$ par $0$, donc, d'après le théorème de la limite monotone, admet en $0$ une limite finie $a$. Le théorème de prolongement $C^1$, permet alors d'affirmer que $f$ admet en $0$ une dérivée à droite, et que celle – ci est égale à $a$.

Maintenant, voyons si $a$ peut être nulle, et pour cela utilisons l'indication de l'énoncé (utiliser **c.**), qui sous – entend que l'on doit utiliser une comparaison série / intégrale. Celle – ci est assez immédiate, et donne pour tout $x > 0$ la minoration : $\displaystyle -f'(x) \geq 2x\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^2x^2\right)^2}$.

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle -f'(x) \geq -\frac{x}{1+x^2} + \frac{\pi}{2} - \arctan x$, et, en faisant tendre $x$ vers $0$, on en déduit que $-a \geq +\frac{\pi}{2}$. $a$ est donc non nul, et le bilan des courses est que $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } 0}$.

## Exercice 19*

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction périodique de période $4$ telle que $g(x) = \begin{cases} 1 + x \text{ si } -2 \leq x \leq 0 \\ 1 - x \text{ si } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $g_k : x \mapsto \frac{1}{2^k} g\left(2^{2^k} x\right)$.

**1.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum g_k(x)$ converge, et que la fonction $G : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x)$ est continue.

**2.** Avec les notations usuelles, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = S_n(x) + R_n(x)$.

**a.** Soit $x$ un réel donné. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe $\varepsilon = \pm 1$ tel que les points $\left(x, g_n(x)\right)$ et $\left(x + \frac{\varepsilon}{2^{2^n}}, g_n\left(x + \frac{\varepsilon}{2^{2^n}}\right)\right)$ soient sur le même segment de graphe de $g_n$.

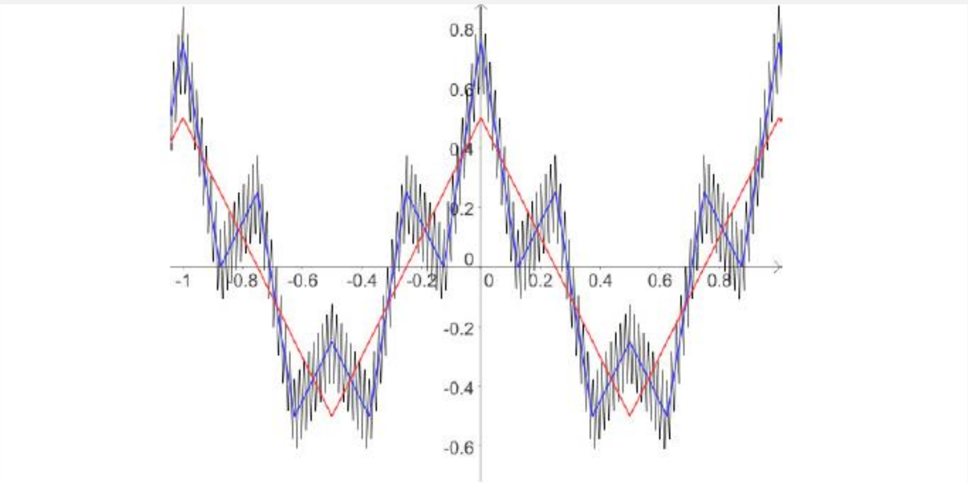
**b.** Soit $h_n = \frac{\varepsilon}{2^{2^n}}$. Montrer que $R_n(x) = R_n\left(x + h_n\right)$.

**c.** Montrer que $\left|g_n\left(x + h_n\right) - g_n(x)\right| = 1$.

**d.** Montrer que $\sup_{1 \leq k \leq n-1} \left(\left|g_k\left(x + h_n\right) - S_k(x)\right|\right) \leq 2^{-2^{n-1}}$, puis que

$\left|S_{n-1}\left(x + h_n\right) - S_{n-1}(x)\right| \leq 2^{-2^{n-1}}$.

**3.** Montrer que $G$ n'est dérivable en aucun point. *La fonction $G$ est appelée fonction de Mc Carthy.*




1. Pour tous $k \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}$, $\left|\frac{1}{2^k} g_k(x)\right| \leqslant \frac{1}{2^k}$, la série $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} g_k(t)$ est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Sa somme $M$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ puisque les $g_k$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

2. a) Soit $x$ un réel donné. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, il existe (au moins) un segment $I$ de longueur $2l := \dfrac{2}{2^{2^n}}$ contenant $x$ sur lequel $g_n$ est affine. Soit $m$ l'abscisse du milieu de $I$. Si $x \geqslant m$, $x - l \in I$ et si $x \leqslant m$, $x + l \in I$. D'où le résultat.

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $k > n$, on a: $g_k(x + h_n) - g_k(x) = g\big(2^{2^k}(x + h_n)\big) - g(2^{2^k}x)$. L'entier $2^{2^k}h_n$ est multiple de $4$, $4$ est période de $g$, donc $g_k(x+h_n) - g_k(x) = 0$, par suite $R_n(x) = R_n(x + h_n)$.

c) On a $g_n(x+h_n) - g_n(x) = g\big(2^{2^n}(x+h_n)\big) - g(2^{2^n}x)$. D'après la définition de $h_n$, les points $\Big(2^{2^n}(x + h_n), g\big(2^{2^n}(x + h_n)\big)\Big)$ et $\Big(2^{2^n}x, g\big(2^{2^n}x\big)\Big)$ sont sur un

même segment du graphe de $g$ dont la pente est $\pm 1$. Puisque $2^{2^n}(x+h_n) - 2^{2^n}x = \varepsilon$, on a:

$$\big|g_n(x + h_n) - g_n(x)\big| = \big|g\big(2^{2^n}(x + h_n)\big) - g(2^{2^n}x)\big| = 1.$$

d) Avec le même argument qu'au $c)$ on peut affirmer:

$$\forall k \in [\![1,n-1]\!],\ \big|g\big(2^{2^k}(x + h_n)\big) - g(2^{2^k}x)\big| = \frac{2^{2^k}}{2^{2^n}} \leqslant \frac{2^{2^{n-1}}}{2^{2^n}} = \frac{1}{2^{2^{n-1}}}.$$

Par suite: $\big|S_{n-1}(x + h_n) - S_{n-1}(x)\big| \leqslant \dfrac{1}{2^{2^{n-1}}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^{2^{n-1}}}.$

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a:

$$\frac{M(x + h_n) - M(x)}{h_n} = \frac{S_{n-1}(x + h_n) - S_{n-1}(x)}{h_n} + \frac{g_n(x + h_n) - g_n(x)}{h_n};$$

on sait que $\big|S_{n-1}(x + h_n) - S_{n-1}(x)\big| \leqslant \dfrac{1}{2^{2^{n-1}}}$ et $\big|g_n(x + h_n) - g_n(x)\big| = 1$, par suite, dès que $n \geqslant 3$ et donc $2^{n-1} \geqslant n + 1$:

$$\Big|\frac{M(x + h_n) - M(x)}{h_n}\Big| \geqslant 2^{2^n}\Big(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{2^{n-1}}}\Big) \geqslant 2^{2^n - n - 1}.$$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} h_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty}\Big|\frac{M(x+h_n)-M(x)}{h_n}\Big| = +\infty$, $M$ n'est donc pas dérivable en $x$.

## Exercice 23

Montrer que la suite de fonctions $(f_n)$ définie par : $\begin{cases} f_n(0) = 0 \\ \forall\, x > 0,\ f_n(x) = x\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)^{2n} \end{cases}$ converge simplement, mais pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$, vers une fonction $f$ que l'on déterminera.

Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $f_n : x \mapsto x^n \dfrac{e^{-x}}{n!}$, puis étudier $\sum f_n$.

- Etude de la première suite de fonctions :

On a évidemment $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$. Soit maintenant un réel $x > 0$. Si $x \in D = \left\{\dfrac{2}{(2k+1)\pi}, k \in \mathbb{N}\right\}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = x$, d'où bien sûr $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = x$. Si $x \notin D$, $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right| < 1$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} x \text{ si } x \in D \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

La convergence ne peut pas être uniforme sur $\mathbb{R}_+$, car $f$ n'est pas continue, alors que les fonctions $f_n$ le sont.

- Etude de la seconde suite de fonctions, et de la série correspondante :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ par croissances comparée : la suite de fonctions $(f_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle. Il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$, car les fonctions $f_n$ ne sont pas bornées (pour tout $n$, $\lim\limits_{x\to-\infty} |f_n(x)| = +\infty$). On peut se demander s'il y a convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ ; une brève étude de la fonction $f_n$ (positive sur $\mathbb{R}_+$) prouve qu'elle y admet un maximum, atteint en $n$ et égal à $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} = n^n \dfrac{e^{-n}}{n!}$. Avec l'équivalent de Stirling : $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} = 0$ : la suite de fonctions $(f_n)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum f_n(x)$ converge (on a reconnu une série exponentielle, et $e^{-x} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1$ : autrement dit, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction constante égale à $1$. Il ne peut pas y avoir convergence uniformément sur $\mathbb{R}$ puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $1 - \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$ n'est pas bornée (en effet, $1 - \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$ …). Il n'y a pas convergence normale sur $\mathbb{R}_+$ car, on l'a vu, $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}$, et la série $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge. Supposons qu'il y ait convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, pour tout $x \geq 0$, $\left|1 - \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)\right| \leq \dfrac{1}{2}$. Mais $\lim\limits_{x\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{N} f_k(x) = 0$, on obtient donc en faisant tendre $x$ vers $+\infty$ dans l'inégalité $\left| 1 - \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \right| \leq \frac{1}{2}$ l'absurdité : $1 \leq \frac{1}{2}$. Il n'y a donc pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$. Il est facile de prouver qu'en revanche, il y a convergence normale sur tout segment de $\mathbb{R}$.

## Exercice 24

Montrer que $\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.

On a en utilisant un développement en série exponentielle : $\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x\ln(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n \ln^n(x)}{n!}\,\mathrm{d}x$.

On prouve, par récurrence et intégrations par parties, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 \frac{(-1)^n x^n \ln^n(x)}{n!}\,\mathrm{d}x$ (intégrale faussement impropre) vaut : $\int_0^1 \frac{(-1)^n x^n \ln^n(x)}{n!}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left| \frac{(-1)^n x^n \ln^n(x)}{n!} \right| \mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$.

Les fonctions $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n x^n \ln^n(x)}{n!}$ sont intégrables sur $]0,1]$ ; la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,1]$ vers la fonction $f : x \mapsto x^{-x}$, qui est continue par morceaux. La série numérique

$\sum \int_0^1 |f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \sum \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ converge. D'après le théorème d'intégration terme à terme pour les intégrales généralisées, $f$ est intégrable sur $]0,1]$, et $\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.

## Exercice 26

**1.** Montrer que $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)\, x^n$ est définie sur $]-1,1[$.

**2.** Montrer que pour tout $x \in ]-1,1[$, $(1-x)S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{n+1}$.

**3.** Montrer que la fonction $U : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right) x^{n+1}$ est continue sur $[-1,1]$.

**4.** Monter qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $(1-x)S(x) \underset{1^-}{=} -x\ln(1-x) + \ell + o(1)$.

**5.** Déterminer la nature de l'intégrale $\int_0^1 S(x)\,\mathrm{d}x$.

Le corrigé qui suit utilise, pour la première question, le cours sur les séries entières, chapitre que l'on n'a pas encore abordé. Je laisse ce corrigé ainsi pour vos révisions de fin d'année, car passer par les séries entières est effectivement plus naturel, une fois ce chapitre vu. Toutefois, il n'est pas non plus très difficile de répondre à cette question **1.** avec nos connaissances actuelles.

**1.** Soit $x > 0$, on a pour tout $n \geq 2$, $\ln(n)\, x^n \neq 0$, et :

$$\left| \frac{\ln(n+1)\, x^{x+1}}{\ln(n)\, x^{n}} \right| = x\, \frac{\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = x \left( 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \right) \underset{n \to +\infty}{\to} x .$$

On en déduit avec la règle de d'Alembert que le rayon de convergence de cette série entière est égal à $1$, et donc que $S$ est définie et de classe $C^{\infty}$ sur $]-1, 1[$. On remarque enfin que cette série entière diverge grossièrement aux bornes de l'intervalle ouvert de convergence.

**2.** On calcule pour tout $x \in ]-1, 1[$ :

$$(1 - x) S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln(n) x^{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n+1) x^{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^{n+1} ,$$

d'où $(1 - x) S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{n+1}$.

**3.** On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^{*}$ : $u_n : \left( \begin{array}{ccc} [-1, 1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left( \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right) x^{n+1} \end{array} \right.$, et l'on a les résultats suivants :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^{*}$, $u_n$ est continue sur $[-1, 1]$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^{*}$ et pour tout $x \in [-1, 1]$, on a : $|u_n(x)| \leq \left| \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right|$, et comme

$\left| \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right| \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^{2}}$, la série de terme général $\left| \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right|$ est convergente, ce qui montre que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[-1, 1]$.

De ces résultats on déduit bien que $U : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right) x^{n+1}$ est définie et continue sur $[-1, 1]$.

**4.** On a pour tout $x \in ]-1, 1[$ : $(1 - x) S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{n+1}$ et $-\ln(1 - x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n}}{n}$,

donc $(1 - x) S(x) + x \ln(1 - x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right) x^{n+1} = U(x)$.

On en déduit, avec le résultat de la question précédente, que : $(1 - x) S(x) + x \ln(1 - x) \underset{x \to 1^{-}}{\to} U(1)$.

**5.** On déduit de ce qui précède que $S(x) \underset{x \to 1^{-}}{\sim} -\dfrac{x \ln(1 - x)}{1 - x} \underset{x \to 1^{-}}{\sim} -\dfrac{\ln(1 - x)}{1 - x}$, et il est immédiat que ces deux fonctions sont définies, continues et positives sur $[0, 1[$. Donc les intégrales $\displaystyle\int_0^1 S(x)\, dx$ et $\displaystyle\int_0^1 -\frac{\ln(1 - x)}{1 - x}\, dx$ sont de même nature. Le changement de variable $t = 1 - x$ montre que les intégrales $\displaystyle\int_0^1 -\frac{\ln(1 - x)}{1 - x}\, dx$ et $\displaystyle\int_0^1 -\frac{\ln(t)}{t}\, dt$ sont de même nature, et enfin, de $\dfrac{1}{t} \underset{t \to 0}{=} o\left( \dfrac{-\ln(t)}{t} \right)$, on déduit que cette dernière intégrale est divergente. En résumé, $\displaystyle\int_0^1 S(x)\, dx$ diverge.

## Exercice 27

**1.** Déterminer le domaine de convergence de $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}\left(x^2\right)}{\operatorname{ch}(n x)}$.

**2.** Montrer que $S$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ ; est – elle continue en $0$ ?

**1.** On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{\operatorname{ch}(n x)} = \frac{2}{\exp(n x) + \exp(-n x)} \underset{n \to +\infty}{\sim} 2 \mathrm{e}^{-n x}$. La série géométrique $\sum \mathrm{e}^{-n x}$ converge absolument, donc $\sum \frac{\operatorname{sh}\left(x^2\right)}{\operatorname{ch}(n x)}$ converge, et $S$ est définie en $x$. Comme les fonctions $x \mapsto \frac{\operatorname{sh}\left(x^2\right)}{\operatorname{ch}(n x)}$ sont paires, $S$ est alors également définie sur $x \in \mathbb{R}_-^*$. Pour $x = 0$, $\sum \frac{\operatorname{sh}\left(x^2\right)}{\operatorname{ch}(n x)}$ est la série nulle, évidemment convergente. Finalement, la fonction $S$ est définie sur $\mathbb{R}$.

**2.** • On a les résultats suivants :

***i –*** les fonctions $f_n : x \mapsto \frac{\operatorname{sh}\left(x^2\right)}{\operatorname{ch}(n x)}$, $n \in \mathbb{N}$, sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

***ii –*** Soient deux réels $a, b > 0$, avec $a < b$. Pour tout $x \in [a, b]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$\left| f_n(x) \right| \leq \frac{\operatorname{sh}\left(b^2\right)}{\operatorname{ch}(n a)} \leq \frac{\operatorname{sh}\left(b^2\right)}{\frac{1}{2}\exp(n a)} = 2 \operatorname{sh}\left(b^2\right) \mathrm{e}^{-n a}$, et la série géométrique $\sum 2 \operatorname{sh}\left(b^2\right) \mathrm{e}^{-n a}$ converge. La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur le segment $[a, b]$.

De ces résultats, on déduit que $S$ est continue sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}_+^*$, ce qui revient à dire que $S$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

*Continuité en* $0$ :

Pour tout $x > 0$, $0 \leq S(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}\left(x^2\right)}{\frac{1}{2}\exp(n x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2 \operatorname{sh}\left(x^2\right) \mathrm{e}^{-n x} = \frac{2 \operatorname{sh}\left(x^2\right)}{1 - \mathrm{e}^{-x}}$ (série géométrique convergente). De même, pour tout $x < 0$, $0 \leq S(x) \leq \frac{2 \operatorname{sh}\left(x^2\right)}{1 - \mathrm{e}^{x}}$.

$\lim_{0^+} \frac{2 \operatorname{sh}\left(x^2\right)}{1 - \mathrm{e}^{-x}} = \lim_{0^-} \frac{2 \operatorname{sh}\left(x^2\right)}{1 - \mathrm{e}^{x}} = 0 = S(0)$, la fonction $S$ est donc continue en $0$.

## Exercice 30

On pose lorsque c'est possible : $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \mathrm{e}^{t n}\right)$.

**1.** Donner l'ensemble de définition $D_f$ de $f$.

**2.** Montrer que $f$ est continue sur $D_f$.

**3.** Etudier les variations de $f$.

**4.** Déterminer les limites de $f$ aux bornes de $D_f$.

**1.** Si $t \geq 0$, la série $\sum \ln\left(1 + e^{tn}\right)$ diverge grossièrement. Si $t < 0$, $\ln\left(1 + e^{tn}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} e^{tn}$, et la série géométrique $\sum e^{tn}$ converge (absolument), donc $\sum \ln\left(1 + e^{tn}\right)$ converge.

Ainsi, l'ensemble de définition de $f$ est $\mathbb{R}_-^*$.

**2.** On a pour tout $t < 0$, $f(t) = \ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + e^{tn}\right)$. Or il est classique que pour tout $u \geq 0$, $0 \leq \ln(1 + u) \leq u$. Donc, $0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + e^{tn}\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} e^{tn}$ (on a déjà dit que la série majorante est convergente), soit : $0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + e^{tn}\right) \leq \dfrac{e^t}{1 - e^t}$. Il est alors clair par encadrement que $\lim_{t \to -\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + e^{tn}\right) = 0$, d'où l'on déduit que $\lim_{t \to -\infty} f(t) = \ln 2$.

**3.** Les fonctions $f_n : t \mapsto \ln\left(1 + e^{tn}\right)$ sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_-^*$, et l'on a prouvé en **1.** que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_-^*$. De plus, pour tout $a < 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \left]-\infty, a\right]$, $0 \leq f_n'(t) = \dfrac{n e^{tn}}{1 + e^{tn}} \leq n e^{tn} \leq n e^{an}$, et la série $\sum_{n \geq 0} n e^{an} = e^a \sum_{n \geq 0} n e^{a(n-1)}$ converge (série géométrique de raison strictement inférieure à $1$ en valeur absolue). On en déduit que $\sum f_n'$ converge normalement, donc uniformément, sur $\left]-\infty, a\right]$. D'après le théorème de dérivation terme à terme, $f$ est de classe $C^1$ sur $\left]-\infty, a\right]$ pour tout $a < 0$, ce qui revient à dire que $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_-^*$. En outre, pour tout $t \in \mathbb{R}_-^*$, $f'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n e^{tn}}{1 + e^{tn}}$.