Lycée Lakanal

2024 - 2025

PC

Algèbre linéaire

Feuille d'exercices

Exercice 1

Soit $a < b$, et $F = \left\{ f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,/\, \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$, muni des opérations usuelles.

Montrer que $(F, +, .)$ est un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel.

Exercice 2

Soit $F = \left\{ (5x + 3y, x - 4y, 2x), (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Montrer que F est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$. Déterminer $\dim F$, et donner une base de F.

Exercice 3

Soit E un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel de dimension finie, et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$.

Montrer que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$ si, et seulement si, $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Exercice 4

Les espaces ci – dessous sont munis de leur base canonique.

Déterminer les matrices, relativement à ces bases, des applications linéaires f suivantes :

1. $f : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (2x + 3y - z, x - 2y + 4z) \end{pmatrix}$.

2. $f : \begin{pmatrix} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(2), P'(1), P(-1)) \end{pmatrix}$.

3. $f : \begin{pmatrix} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ P & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} (P(i) - P'(j)) E_{i,j} \end{pmatrix}$.

Exercice 5

Soit $\Phi : \begin{pmatrix} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (M, P) & \mapsto & (M_{1,1} + P(n))_{n \in \mathbb{N}} \end{pmatrix}$. Montrer que Φ est une application linéaire.

Exercice 6

Soit $\Phi : f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mapsto g = \Phi(f) : \begin{pmatrix} x \mapsto \dfrac{1}{2x} \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \mapsto f(0) \end{pmatrix}$.

Montrer que Φ est un endomorphisme de $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 7

Soit $\Phi : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto 3XP - \left(X^2+1\right)P'$.

Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$, et donner sa matrice dans la base canonique de cet espace.

Exercice 8

Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles carrés d'ordre 2.

Soit E le sous – ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formé des matrices dont les sommes des coefficients de chaque colonne sont égales.

Montrer que E est un sous – espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminez – en une base et la dimension.

Exercice 9

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On considère l'application $\Phi : \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & AX - XA \end{array} \right.$.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Déterminer la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Préciser l'image et le noyau de Φ, en donnant une base de chacun de ces deux sous − espaces.

Exercice 10

Matrices stochastiques

Une matrice $M = \left(m_{i,j}\right)_{(i,j)\in 1,n^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite ***stochastique*** lorsque tous ses coefficients sont positifs ou nuls, et lorsque la somme des coefficients de chaque colonne de M vaut 1 :

$$\forall (i,j) \in 1,n^2,\ m_{i,j} \geq 0, \text{et } \forall j \in 1,n,\ \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = 1.$$

Montrer que le produit de deux matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est encore une matrice stochastique.

Exercice 11

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 3A + 2I$. En déduire que la matrice A est inversible, et déterminer son inverse.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer a_n et b_n tels que 1 et 2 soient racines de $X^n - a_n X - b_n$.

3. En déduire A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 12

On note $\mathcal{B} = \left(1, X, X^2\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On considère également les familles $\mathcal{B}' = \left(1, 1+X, 1+X+X^2\right)$, $\mathcal{B}'' = \left((X-1)(X-2), X(X-2), X(X-1)\right)$, et l'on admet que ce sont des bases de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.

2. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}''$.

3. En utilisant des formules de changement de base, déterminer les coordonnées du polynôme $3 - 5X + 2X^2$ dans la base $\mathcal{B}'$, puis dans la base $\mathcal{B}''$.

Exercice 13

1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$f(2,-1,2) = (1,2) \;;\; f(1,1,2) = (0,3) \;;\; f(1,-1,1) = (-3,1) .$$

2. Déterminer alors $f(0,0,7)$.

Exercice 14

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

On pose $\varepsilon_1 = (1,1,1)$, $\varepsilon_2 = (1,-1,0)$, $\varepsilon_3 = (1,0,1)$, et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}'$.

3. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ et de $\operatorname{Im} f$.

Exercice 15

On note A la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ 3 & -8 & 10 \\ 3 & -9 & 11 \end{pmatrix}$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à A.

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, résoudre le système $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathbb{C}^3$.

2. On pose $e_1 = (3,1,0)$, $e_2 = (-1,1,1)$, $e_3 = (0,1,1)$. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{C}^3$.

3. Déterminer sans calcul la matrice A' de f dans la base (e_1, e_2, e_3).

4. Calculer $(A')^n$, puis A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 16

Soit $n \in [\![2, +\infty [\![$, et $A = \begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ n-1 & n-1 & n-2 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Etudier l'inversibilité de la matrice A. Le cas échéant, déterminer la matrice inverse A^{-1}.

Exercice 17

Hyperplans & formes linéaires

Soit E un $\mathbb{R}$–espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$.

1. Soit H un s-e.v. de E. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :

i **)** $\dim H = n-1$.

ii **)** Il existe une droite vectorielle D telle que $E = H \oplus D$.

iii **)** Il existe une forme linéaire non nulle f telle que $H = \operatorname{Ker} f$.

On appelle ***hyperplan*** *de E tout s-e.v. H vérifiant l'une de ces conditions.*

2. Soit f et g deux formes linéaires sur E, f étant supposée non nulle.

a_ On suppose que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$. Montrer que : $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}^* /\ f = \lambda\, g$.

b_ Que peut – on dire lorsque $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g$?

Exercice 18

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et Δ l'application définie par : $\Delta : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X+2) - P(X) \end{array} \right.$.

1. Déterminer $\deg(\Delta(P))$ en fonction de $\deg(P)$. En déduire que $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

2. Déterminer $\operatorname{Ker} \Delta$. L'opérateur Δ est-il injectif ? surjectif ?

3. Déterminer $\operatorname{Im} \Delta$.

3. Si $\mathcal{B}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, déterminer $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\Delta)$.

Exercice 19

Soit E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $f \in \mathcal{L}(E)$, non nul.

On suppose que f est nilpotent, *i.e.* qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer que f n'est pas un automorphisme de E.

2. Justifier l'existence d'un plus petit entier $p \in \mathbb{N}^*$ et d'un vecteur $x_0 \in E$ tels que :

$$f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}, \text{ et } f^{p-1}(x_0) \neq 0_E.$$

2. Montrer que la famille $\mathcal{F} = \left(x_0, f(x_0), ..., f^{p-1}(x_0)\right)$ est libre.

En déduire que $p \leq n$.

Exercice 20

Polynômes interpolateurs de Lagrange & matrices de Vandermonde

Soit $(a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ $n+1$ réels distincts.

On considère l'application : $\Psi : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & \left(P(a_0), P(a_1), ..., P(a_n)\right) \end{array} \right.$.

1. Montrer que Ψ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2. En déduire l'existence d'une unique famille $(L_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$

tels que : $\forall\ (i, j) \in [\![0, n]\!]^2,\ L_i(a_j) = \delta_{i,j}$.

3. Expliciter les polynômes $(L_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$.

4. Déterminer la matrice de l'application Ψ relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et de $\mathbb{R}^{n+1}$. *Cette matrice est appelée* ***matrice de Vandermonde***. Que peut – on conclure sur ces matrices ?

Exercice 21

Soient $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer J^2, K^2, $J\,K$ et $K\,J$.

2. Déterminer J^n et K^n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les formules suivantes :

a. $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} K^i J^{n-i} = \left(3^n - 2^n\right) K + 3^{n-1} J$.

b. $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} J^i K^{n-i} = (-1)^{n-1} K + \left(\dfrac{2^n - (-1)^n}{3} \right) J$.

c. $(K + J)^n = 2^{n-1} K + 2^{n-1} J$.

Exercice 22

Les matrices suivantes sont – elles inversibles ? Si oui, déterminer leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 13 & 2 & 1 & 9 \\ 7 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 23

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimensions finies non nulles, et soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

1. Montrer que : $\dim\left(\operatorname{Ker}(g \circ f)\right) \leq \dim\left(\operatorname{Ker} g\right) + \dim\left(\operatorname{Ker} f\right)$.

<u>hint</u> *On appliquera le théorème du rang aux applications,* f *,* $g \circ f$ *, et à la restriction de* g *à* $\operatorname{Im} f$.

2. Montrer que : $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) - \dim F \leq \operatorname{rg}(g \circ f) \leq \min\left(\operatorname{rg}(f), \operatorname{rg}(g)\right)$.

Exercice 24

Soient n et p deux entiers strictement positifs, tels que $n > p$.

On considère deux applications linéaires $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p$ et $g : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^n$.

On suppose que l'application $h = g \circ f$ vérifie les deux conditions suivantes :

i – $h \circ h = h$;

ii – $\operatorname{rg}(h) = p$.

1. Montrer que f et g sont toutes deux de rang p.
Que peut – on alors dire de f ? De g ?

2. Montrer que $f \circ g = Id_{\mathbb{R}^p}$.

Exercice 25

Soient E un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. On désigne par $f|_{\operatorname{Im} f}$ l'endomorphisme induit par f sur $\operatorname{Im} f$.

a. Montrer que $\operatorname{Ker}\left(f|_{\operatorname{Im} f}\right) = \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$.

b. Montrer que $\operatorname{Im}\left(f|_{\operatorname{Im} f}\right) = \operatorname{Im}\left(f^2\right)$.

2. En introduisant alors $f\,|_{\operatorname{Im} f}$, montrer l'équivalence des assertions suivantes :

i **)** $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E$.

ii **)** $\operatorname{Im}\left(f^2\right) = \operatorname{Im} f$.

iii **)** $\operatorname{Ker}\left(f^2\right) = \operatorname{Ker} f$.

Le résultat peut se montrer sans l'introduction de $f\,|_{\operatorname{Im} f}$, *mais cémouinzouli…*

Exercice 26

Inversibilité des matrices à diagonale strictement dominante (Hadamard)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^*$ une matrice vérifiant :

$$\forall\, i \in \{1, ..., n\},\ \left|a_{i,i}\right| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left|a_{i,j}\right|.$$

1. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Montrer que : $AX = O_{n,1} \Rightarrow X = O_{n,1}$.

On pourra pour cela considérer un coefficient x_k *de la matrice colonne* X *de module maximal, i.e. tel que :*

$$\left|x_k\right| = \max_{i \in [\![1, n]\!]} \left|x_i\right| = \| X \|_\infty .$$

2. En déduire que la matrice A est inversible.

Exercice 27

Soit E un $\mathbb{K}$ – e.v. de dimension paire $n = 2p$, et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer l'équivalence des trois assertions suivantes :

i_ $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $\operatorname{rg}(f) = p$.

ii_ $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.

iii_ Il existe une base $\mathcal{B}$ de E relativement à laquelle la matrice de f est de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} \mathrm{O}_p & A_p \\ \mathrm{O}_p & \mathrm{O}_p \end{pmatrix}, \text{ avec } A_p \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K}).$$

iv_ Il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans la matrice de f est de la forme : $M = \begin{pmatrix} \mathrm{O}_p & I_p \\ \mathrm{O}_p & \mathrm{O}_p \end{pmatrix}$.

Exercice 28

Montrer qu'il n'existe aucun couple $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que $AB - BA = I_n$.

Exercice 29

Caractérisation du dual de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à l'aide de la trace

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que l'application Φ_A définie par :

$$\Phi_A : \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ M & \mapsto & \operatorname{Tr}(AM) \end{array} \right.$$

est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Réciproquement, soit Φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On souhaite montrer que : $\exists\,!\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\ /\ \Phi = \Phi_A$, Φ_A étant définie comme en **1.** , *i.e.* que : $\exists\,!\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\ /\ \forall\ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \Phi(M) = \mathrm{Tr}(AM)$.

a. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, calculer $\mathrm{Tr}\left(AE_{i,j}\right)$.

b. Conclure.

3. Déterminer l'expression du produit $E_{i,j} . E_{k,l}$.

4. Soit Ψ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall\ (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2,\ \Psi(MN) = \Psi(NM).$$

Montrer que Ψ est proportionnelle à la trace , *i.e.* que :

$$\exists\ \lambda \in \mathbb{K}\ /\ \forall\ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \Psi(M) = \lambda\,\mathrm{Tr}(M).$$

Exercice 30*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Notons $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'application linéaire $X \mapsto AXB$.

Démontrer la formule : $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}(A) \times \mathrm{Tr}(B)$.

Exercice 31

Dans tout cet exercice, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ *, et* $n \in \mathbb{N}^*$.

0. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que l'application Φ_A définie par $\Phi_A : \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ M & \mapsto & \mathrm{Tr}(AM) \end{array}\right.$

est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Réciproquement, soit $\Phi \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\right)^*$. Montrer que : $\exists\,!\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\ /\ \Phi = \Phi_A$.

2. Montrer que, dans tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une matrice inversible.

3. Déterminer toutes les formes linéaires Ψ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que :

$$\forall\ (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2,\ \Psi(MN) = \Psi(NM).$$

Exercice 32

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On suppose que P prend des valeurs rationnelles en $n + 1$ rationnels $\left(q_k\right)_{0 \le k \le n}$.

Montrer que $P \in \mathbb{Q}_n[X]$, autrement dit que les coefficients de P sont rationnels.

Exercice 33

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, et $\left(p_k\right)_{k \in [\![1, n]\!]}$ une famille de n projecteurs **non nuls** de E

tels que : $\forall\ (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Soit $p = \sum_{k=1}^{n} p_k$. Montrer que p est un projecteur de E .

2. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Im} p_k = \bigoplus_{k=1}^{n} \operatorname{Im} p_k = \operatorname{Im} p$.

3. Montrer que : $\forall\ k \in \ 1, n \ , \operatorname{rg}\left(p_k\right) = 1$.

4. Montrer enfin que $E = \bigoplus_{k=1}^{n} \operatorname{Im} p_k$, et que $\sum_{k=1}^{n} p_k = Id_E$.

Exercice 34

Soient $p \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et $f_1, \ldots, f_p$ des endomorphismes de E.

On suppose que $f_1 + f_2 + \ldots + f_p = \mathrm{Id}$ et $\sum_{i=1}^{p} \operatorname{rg}\left(f_i\right) \leq n$.

Montrer que les f_i sont des projecteurs *orthogonaux*, en ce sens que $f_1 \circ f_2 = 0$ dès que $i \neq j$.

On pourra d'abord montrer que E est somme directe des images des f_i.

Exercice 35

Soient E un $\mathbb{C}$ – espace vectoriel de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}\left(E\right)$ vérifiant : $f^3 = Id_E$.

1. Montrer que : $\operatorname{Ker}\left(f - Id_E\right) \oplus \operatorname{Ker}\left(f - j\, Id_E\right) \oplus \operatorname{Ker}\left(f - j^2 Id_E\right) = E$.

2. En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Exercice 36

Soient F_1, F_2, F_3 trois sous – espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

1. Montrer que la somme $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$ est directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \left\{0\right\}$ et $\left(F_1 + F_2\right) \cap F_3 = \left\{0\right\}$.

2. Généraliser.

Exercice 37

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, et $F_1, \ldots, F_n$ des sous – espaces vectoriels de E tels que $F_1 + F_2 + \ldots + F_n = E$.

Montrer qu'il existe des sous – espaces vectoriels $G_1 \subset F_1$, $G_2 \subset F_2$, ..., $G_n \subset F_n$ tels que $G_1 \oplus G_2 \oplus \ldots \oplus G_n = E$.

Exercice 38

On rappelle qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n\left(\mathbb{C}\right)$ est dite nilpotente lorsqu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

1. Soient A, B dans $\mathcal{M}_n\left(\mathbb{C}\right)$ nilpotentes. $A + B$ est-elle toujours nilpotente ?

(On a demandé de prouver que c'était le cas si A et B commutent, et de donner un contre-exemple dans le cas contraire).

2. Soient A, B dans $\mathcal{M}_n\left(\mathbb{C}\right)$ telles que $A + B$ est nilpotente. Montrer que $\operatorname{Tr}\left(A B\right) = 0$.

Exercice 39

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $\mathcal{C}_n = \left\{ A \in \mathcal{M}_n\left(\mathbb{R}\right),\ \exists\ K_A \in \mathbb{R},\ \forall\ \left(i, j\right) \in [1, n]^2,\ K_A = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell, j} \right\}$.

1. Montrer que la matrice identité appartient à $\mathcal{C}_n$.

2. Montrer que $\mathcal{C}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$.

3. Soient $A = \left(a_{i,j}\right)_{1 \leq i, j \leq n}$ et $B = \left(b_{i,j}\right)_{1 \leq i, j \leq n}$ deux éléments de $\mathcal{C}_n$. On pose $C = A B$.

a. Pour $(p, q) \in [\![1, n]\!]^2$, exprimer $c_{p,q}$ en fonction des $a_{i,j}$ et des $b_{i,j}$.

b. Montrer que $C \in \mathcal{C}_n$.

4. Soit $A \in \mathcal{C}_n$ une matrice inversible. On définit : $\varphi_A : \begin{pmatrix} \mathcal{C}_n & \to & \mathcal{C}_n \\ M & \mapsto & A\,M \end{pmatrix}$.

Montrer que φ_A est bijective. En déduire que $A^{-1} \in \mathcal{C}_n$.

5. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel $\mathcal{C}_n$?

Exercice 40

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et soit u un endomorphisme de E tel que $u^{13} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Montrer que $\operatorname{rang}\left(u^6\right) + \operatorname{rang}\left(u^7\right) \leq n$.

Exercice 41

Soient E un espace vectoriel, et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = Id_E$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker}(f)$.

2. Montrer que $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im}(g)$.

3. Montrer que $\operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(g) = E$.

Exercice 42

On note $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On considère les ensembles : $C(D) = \left\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ M\,D = D\,M\right\}$,

et, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $S_\lambda(D) = \left\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ M^2 - \lambda M + 2 I_3 = D\right\}$.

1. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $S_\lambda(D) \subset C(D)$.

2. Montrer que $C(D)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et en donner une base.

3. Déterminer $S_\lambda(D)$. On discutera suivant la valeur de λ.

Exercice 43

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

1. Caractériser les endomorphismes f de E tels que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$.

2. Soit f un tel endomorphisme. Construire une base de E dans laquelle la matrice de f est la plus simple possible (on demande, en particulier, qu'elle contienne le plus de zéros possibles).

Exercice 44

Préliminaire

Soit E un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel, et $f \in \mathcal{L}(E)$.

On désigne par $f_{|\operatorname{Im} f}$ l'endomorphisme induit par f sur $\operatorname{Im} f$.

Montrer que $\operatorname{Ker}\left(f_{|\operatorname{Im} f}\right) = \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$, et que $\operatorname{Im}\left(f_{|\operatorname{Im} f}\right) = \operatorname{Im}\left(f^2\right)$.

Enoncé principal

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et E un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel de dimension finie égale à $3n$.

On considère un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $\operatorname{rg}(f) = 2n$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im}\left(f^2\right)$.

2. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de E telle que : $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} O_n & O_n & O_n \\ I_n & O_n & O_n \\ O_n & I_n & O_n \end{pmatrix}$.

Exercice 45

Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que f est une trijection de E si et seulement si : $f \circ f \circ f = f$.

1. Montrer que si f est un projecteur, alors f est une trijection.

2. Montrer que si f est une trijection, alors $E = \operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f)$.

3. Montrer que si f est une trijection, alors $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}\left(f^2 - Id_E\right)$.

4. Donner un exemple d'une trijection de $\mathbb{R}^3$ qui n'est pas un projecteur.

5. Montrer que le résultat de la question **2.** reste valable en dimension infinie.

Exercice 46

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels, et $u : E \to F$, $v : F \to G$ deux applications linéaires.

On suppose que F est de dimension finie n. Montrer que $\max\left(0, \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v - n\right) \leq \operatorname{rg}\left(v \circ u\right) \leq \min\left(\operatorname{rg} u, \operatorname{rg} v\right)$.

Exercice 47

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, et $p_1, ..., p_n$ des projecteurs de E tels que $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $p_i \circ p_j = p_j \circ p_i$, et

$p_1 + p_2 + ... + p_n = E$.

1. Montrer que pour tout i. $\operatorname{rg} p_i = \operatorname{Tr} p_i$.

2. Montrer que $E = \operatorname{Im} p_1 \oplus \operatorname{Im} p_2 \oplus ... \oplus \operatorname{Im} p_n$.

Exercice 48

Soient E un $\mathbb{C}$ – espace vectoriel de dimension finie, f un élément nilpotent non nul de $\mathcal{L}(E)$. On note n l'indice de nilpotence de f. Ainsi, on a $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. On désigne par Φ_f l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ défini par :

$$\Phi_f : \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}(E) \\ g & \mapsto & f \circ g - g \circ f \end{array} \right.$$

1. Montrer que pour tout endomorphisme g de E et tout entier naturel $p \in \mathbb{N}^*$,

on a : $\left(\Phi_f\right)^p (g) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} f^{p-k} \circ g \circ f^k$.

2. En déduire que Φ_f est nilpotent, et majorer sur son indice de nilpotence.

3. Soit $a \in \mathcal{L}(E)$. On souhaite construire $b \in \mathcal{L}(E)$ tel que $a \circ b \circ a = a$.

a. On note S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} a$ et T un supplémentaire de $\operatorname{Im} a$.

Montrer que l'application $a = a_{|S}$ est un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} a$.

b. Soit $b \in \mathcal{L}(E)$ donnée par : $b(x) = \left| \begin{array}{lll} a^{-1}(x) & \text{si} & x \in \operatorname{Im} a \\ 0 & \text{si} & x \in T \end{array} \right.$.

Montrer que b est bien définie, et que $a \circ b \circ a = a$.

4. Déterminer l'indice de nilpotence de Φ_f.

Exercice 49

Soit E le $\mathbb{C}$ – espace vectoriel des applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

On pose

$$F_1 = \left\{ f \in E \ / \ \forall z \in \mathbb{C},\ f(jz) = f(z) \right\},$$

$$F_2 = \left\{ f \in E \ / \ \forall z \in \mathbb{C},\ f(jz) = j\, f(z) \right\}, \text{ et}$$

$$F_3 = \left\{ f \in E \ / \ \forall z \in \mathbb{C},\ f(jz) = j^2 f(z) \right\}.$$

1. Montrer que $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 = E$.

2. Généraliser.

Exercice 50

Soit E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\exists\, n \in \mathbb{N}^* \ / \ u^n = Id_E$.

Soit aussi V un s-e.v. de E u – stable, et p un projecteur d'image V. On pose : $q = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u^k \circ p \circ u^{n-k}$.

1. Montrer que $q \circ u = u \circ q$. Montrer ensuite que $p \circ q = q$.

2. Montrer que q est un projecteur de E. En déduire que $q \circ p = p$.

3. Montrer que $\operatorname{Ker} q$ est un supplémentaire de V qui est également u – stable.

Exercice 51

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant : $f^3 = f^2 + 2f$. On pose :

$$E_1 = \operatorname{Ker} f,\ E_2 = \operatorname{Ker}\left(f + Id_E\right), \text{ et } E_3 = \operatorname{Ker}\left(f - 2\,Id_E\right).$$

1. Montrer que $E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 = E$.

Pour $(i, j, k) \in [\![1, 3]\!]^3$ distincts, soit p_i la projection sur E_i parallèlement à $E_j \oplus E_k$.

2. Exprimer f en fonction des $\left(p_i\right)_{i \in [\![1, 3]\!]}$.

3. En déduire qu'il existe des suites réelles $\left(a_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $\left(b_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$, et $\left(c_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f^n = a_n\, p_1 + b_n\, p_2 + c_n\, p_3.$$

4. Montrer alors qu'il existe des suites $\left(\alpha_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $\left(\beta_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$, et $\left(\chi_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f^n = \alpha_n\, Id_E + \beta_n\, f + \chi_n\, f^2,$$

et déterminer ces suites.

Exercice 52

Soient E un $\mathbb{C}$ – espace vectoriel de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant : $f^3 = Id_E$.

1. Montrer que : $\operatorname{Ker}\left(f - Id_E\right) \oplus \operatorname{Ker}\left(f - j\,Id_E\right) \oplus \operatorname{Ker}\left(f - j^2 Id_E\right) = E$.

2. En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Exercice 53

Soient $E = \mathbb{K}_3[X]$, $F = \{P \in E,\ P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$,

$G = \{P \in E,\ P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$, $H = \{P \in E,\ P(X) = P(-X)\}$.

1. Montrer que $F \oplus G = \{P \in E,\ P(1) = P(2) = 0\}$.

2. Montrer que $F \oplus G \oplus H = E$.

Exercice 54

Soient F_1, F_2, F_3 trois sous – espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

1. Montrer que la somme $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$ est directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ et $(F_1 + F_2) \cap F_3 = \{0\}$.

2. Généraliser.

Exercice 55

Soit $(a_k)_{k \in [\![0,n]\!]} \in \mathbb{R}^{n+1}$ $n+1$ réels **distincts**. Montrer que :

$$\exists\,!\,(\lambda_k)_{k \in [\![0,n]\!]} \in \mathbb{R}^{n+1} \ /\ \forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P(a_k) = \int_0^1 P(t)\,dt.$$

*On donnera si possible deux démonstrations : l'une utilisant la **base des polynômes interpolateurs de Lagrange**, et l'autre l'**inversibilité des matrices de Vandermonde**.*

Exercice 56

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension finie n, et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E.

Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note $F_i = \{u \in \mathcal{L}(E),\ \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Vect}(e_i)\}$.

1. Caractériser matriciellement les éléments de F_i.

2. Montrer que $F_1 \oplus F_2 \oplus ... \oplus F_n = \mathcal{L}(E)$.

Exercice 57

Soient E un $\mathbb{K}$ – ev, et $F_1, ..., F_n$ des sous – espaces vectoriels de E tels que $F_1 + F_2 + ... + F_n = E$.

Montrer qu'il existe des sous – ev $G_1 \subset F_1$, $G_2 \subset F_2$, ..., $G_n \subset F_n$ tels que $G_1 \oplus G_2 \oplus ... \oplus G_n = E$.

Exercice 58

Soient E un $\mathbb{K}$ – ev, $E_1, ..., E_n$ des sous – espaces vectoriels de E tels que $E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_n = E$, et F un autre sous – espace vectoriel de E. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $F_i = E_i \cap F$.

1. Montrer que la somme $G = F_1 + F_2 + ... + F_n$ est directe.

2. Comparer F et G.

Exercice 59

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ trois réels distincts, et $P \in \mathbb{R}[X]$.

Déterminer le reste dans la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)(X - c)$.

On utilisera les polynômes interpolateurs de Lagrange.

Exercice 60

Soient $n \in \mathbb{N}$, E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, F un sous – espace vectoriel de E, et $u_0, ..., u_n$ des vecteurs de E.

On définit une application $P : \mathbb{K} \to E$ par : $\forall x \in \mathbb{K}, P(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k u_k$. Montrer que, s'il existe $n+1$ éléments distincts de $\mathbb{K}$ tels que $P(x) \in F$, alors les vecteurs $u_0, ..., u_n$ appartiennent tous à F.

Exercice 61

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ n réels distincts, $(b_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ et $(c_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ $2n$ réels quelconques.

Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ tel que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \ P(a_k) = b_k \text{ et } P'(a_k) = c_k.$$