Lycée Lakanal

Colles PC

2024- 2025

Semaine 9

Suites et séries de fonctions ; déterminants

Exercice 1

On pose si possible $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + n^4 x^2}$.

a. Définition et continuité de f.

b. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

c. Etudier la dérivabilité de f en 0. On sera amené à calculer :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(1 + x^2 t^2\right)^2}.$$

Exercice 2

Soit $g : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t}{1 + n^2 t^2}$.

a. Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}^*$.

b. Déterminer la limite de g en 0^+.

Exercice 3

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, u_n la fonction $u_n : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\arctan n x}{n^2} \end{array}\right.$. Soit $f = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f est continument dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 4

Montrer que

$$\forall x \in]-1,1[\,, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \sin n x}{n} = \arctan\left(\frac{x \sin x}{1 - x \cos x}\right).$$

Exercice 5

Pour $f \in C([0,1], \mathbb{R})$, on note $\Phi f : \left\{\begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$.

a. Montrer que : $\forall f \in C([0,1], \mathbb{R})$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0,1]$:

$$\Phi^n f(x) = \int_0^x \frac{f(t)(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}t.$$

b. Étudier la série de fonctions $\left(\sum \Phi^n f\right)_{n \geq 1}$.

Exercice 6

Pour $x \in [-1,1]$, et $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_0(x) = x$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_{n+1}(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{2} u_n(x)\right).$$

Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge normalement sur $[-1,1]$.

Exercice 7

Soit $\left(a_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels telle que la série $\sum_{n \geq 1} n\, a_n$ converge absolument.

Pour tout $(x, y) \in [0, \pi]^2$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n \sin(n x)$ et

$g(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(n x) \sin(n y)$.

Montrer que f est positive sur $[0, \pi]$ si et seulement si g est positive sur $[0, \pi]^2$.

Exercice 8

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n x)}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f. *On se place désormais sur* $]1, +\infty[$.

2. Prouver que f est continue sur $]1, +\infty[$. Etudier ses limites en 1 et en $+\infty$.

3. Montrer que f est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$, et établir son tableau de variation.

Exercice 9

Soit $f_n : t \mapsto \frac{e^{i n t}}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur tout segment de $]0, 2\pi[$.

On pourra écrire que $e^{i k t} = \left(S_k(t)\right) - \left(S_{k-1}(t)\right)$, avec $S_k(t) = \sum_{p=1}^{k} e^{i p t}$.

2. En déduire que f est continue sur $]0, 2\pi[$.

Exercice 10

Pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{n}\,(x + n)}$.

1. Montrer que la série de fonctions de terme général f_n est simplement

Convergente sur $\mathbb{R}_+$. On note f sa somme.

2. Montrer que $\sum f_n$ est normalement convergente sur $[0, M]$ pour tout

$M > 0$. Est – elle normalement convergente sur $\mathbb{R}_+$?

3. Montrer que f est continue, dérivable et croissante sur $\mathbb{R}_+$.

4. Soient $n \geq 1$ et $x_0 \geq n$. Montrer que $f(x_0) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}}$. En déduire

que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

5. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Exercice 11

Soit la série de fonctions $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$.

1. Montrer que S définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer la limite de S en $+\infty$.

Exercice 12

Soient $a > 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$f_n :]n, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}\,(x-1)\cdots(x-n)\, a^{-x}$.

Montrer que f atteint son maximum en un unique $x_n \in]n, +\infty[$.

Déterminer la limite de la suite $\left(x_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Donner un équivalent de x_n.

Exercice 13

Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & b & \cdots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \cdots & a & c_n \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \text{ et } A(X) = A + XJ.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \prod_{i=1}^{n} (c_i - x)$.

1. Pour $a \neq b$, évaluer $P(X) = \det(A(X))$.

En déduire que $\det A = \dfrac{b\,f(a) - a\,f(b)}{b-a}$.

2. Toujours à l'aide de la fonction f, exprimer $\det A$ dans le cas où $a = b$.

Exercice 14

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note M_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont $1, 2, \dots, n$ (dans cet ordre), et dont tous les autres coefficients sont égaux à 1. On note P_n le polynôme caractéristique de M_n.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P_{n+1} = (X - n) P_n - X(X-1)\dots(X-(n-1)).$$

2. Montrer que pour tout $n \geq 1$ et tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$(-1)^k P_n(n-k) > 0.$$

3. En déduire que M_n est semblable à une matrice diagonale.

Exercice 15

Soient a_1, a_2, a_3, a_4 des réels, et $A = \left((1 - \delta_{i,j}) a_i \right)_{(i,j) \in \llbracket 1,4 \rrbracket^2}$, où $\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker. On pose $P = \det(A + x I_4)$.

1. Déterminer $P(a_i)$ pour $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$.

2. Trouver des constantes λ et α_i telles que :

$$\frac{P}{(X - a_1)(X - a_2)(X - a_3)(X - a_4)} = \lambda + \sum_{i=1}^{4} \frac{\alpha_i}{X - \alpha_i}.$$

3. En déduire $\det(A)$.

Exercice 16

Calculer, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$

Exercice 17

Calculer, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 + a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 + a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 + a_n \end{vmatrix}_{[n]}$.

Exercice 18

Calculer le déterminant de Vandermonde lacunaire suivant

$$D(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_0^{k-1} & a_1^{k-1} & \cdots & a_{n-1}^{k-1} \\ a_0^{k+1} & a_1^{k+1} & \cdots & a_{n-1}^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_0^n & a_1^n & \cdots & a_{n-1}^n \end{vmatrix}_{[n]}$$

Exercice 19

On pose $A = \begin{pmatrix} c_1 & a & \cdots & a \\ b & c_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & c_n \end{pmatrix}$ où $(c_1, c_2, \dots, c_n, a, b) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $a \neq b$

1. Soit J_n la matrice composée uniquement de 1. Montrer que la fonction de la variable réelle $\varphi : x \mapsto \det(A - xJ_n)$ est polynômiale de degré 1.
2. Calculer $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$.
3. En déduire la valeur de $\det(A)$.
4. Que se passe-t-il quand $a = b$?

Exercice 20

Montrer que pour tout $n \geqslant k+2$, le déterminant suivant est nul :

$$D(n,k) = \begin{vmatrix} 1^k & 2^k & \cdots & n^k \\ 2^k & 3^k & \cdots & (n+1)^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n^k & (n+1)^k & \cdots & (2n-1)^k \end{vmatrix}_{[n]} .$$

On pourra introduire les polynômes $P_j = (X + j - 1)^k$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Exercice 21

Soient $a_1, \dots, a_n$ des nombres complexes, $\omega = e^{2i\pi/n}$, et A et Φ_n les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_1 & \dots & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \dots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Calculer $\det(AM)$ et en déduire $\det(A)$.

Exercice 22

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle déterminant de Hilbert d'ordre n : $H_n = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{vmatrix}_n$

a) On pose, pour tout x réel, $\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-2} \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{x+1} & \frac{1}{x+2} & \cdots & \frac{1}{x+n-1} \end{vmatrix}_n$

Montrer qu'il existe $Q_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \forall x \in \mathbb{R},\ \Delta_n(x) = \dfrac{Q_n(x)}{x(x+1)(x+2)...(x+n-1)}$

puis qu'il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $Q_n(x) = \lambda_n(x-1)(x-2)...(x-n+1)$

b) Vérifier que $H_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{(k!)^4}{((2k)!)^2} \right) \frac{2^n\, n!}{(2n)!}$