Lycée Lakanal

Colles PC

2024- 2025

Semaine 7 – 14/10/2024

Séries numériques ; suites et séries de fonctions

Exercice 1

Soient $A \in \mathbb{R}_+^*$, et f une application définie, continue sur l'intervalle ouvert $I =]-A, A[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose $J = I \cap \mathbb{R}_+^*$, et l'on suppose que :

- • $\forall x \in J,\ 0 < f(x) < x$.
- •• f admet en 0 un développement limité de la forme :

$$f(x) \underset{0}{=} x - a x^k + o\left(x^k\right),$$

où $a \in \mathbb{R}_+^*$ et k est un entier strictement supérieur à 1. Soit enfin $u_0 \in J$.

1. Montrer que l'on définit bien une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la donnée de son premier terme u_0 et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

Prouver la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et déterminer sa limite.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\beta \in \mathbb{R}$, on pose : $v_n = u_{n+1}^{\beta} - u_n^{\beta}$.

Montrer qu'il existe un unique $\beta \in \mathbb{R}$ tel que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ***non nul***. En déduire alors que $u_n \sim \left((k-1)\, a\, n\right)^{\frac{1}{1-k}}$.

3. On pose $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Exercice 2

1. Pour quelles valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ la série de terme général

$$\ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$$

est – elle convergente ?

2. Calculer alors la somme de cette série.

Exercice 3

Pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on pose $u_n = \dfrac{1}{\sum_{k=2}^{n} (\ln k)^2}$.

1. Déterminer un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

2. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 2} u_n$.

Exercice 4

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son premier terme u_0 strictement positif, et par la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\arctan(u_n)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose également : $v_n = 2^n u_n$.

1. Etudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente.

3. Etudier la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

4. Prouver la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right)$. On note K sa somme.

5. Déterminer, en fonction de K, un équivalent simple de u_n.

Exercice 5

Soit $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels telle que $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ converge, et $a_n \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Montrer que $\sum\limits_{n\geq 1} n\left(a_n - a_{n+1}\right)$ converge, et que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\left(a_n - a_{n+1}\right) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Exercice 6

Soit $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes réels positifs ou nuls. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$v_n = \dfrac{u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{2n-1}}{n}$.

Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature :

1. lorsque la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ;

2. dans le cas général.

Exercice 7

Soit $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ une série à termes positifs divergente. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$v_n = \frac{u_n}{\left(1+u_0\right)\left(1+u_1\right)\cdots\left(1+u_n\right)}.$$

Nature et somme de la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$.

Exercice 8

Soit $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs, et $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $x_0\in\mathbb{R}_+^*$ et $\forall n\in\mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \sqrt{x_n^2 + u_n}\right)$. Montrer que la série $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si la suite $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 9

Soit $\alpha > 0$. Déterminer la nature de la série de terme général $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^\alpha + (n-k)^\alpha}$.

Exercice 10

On considère la série numérique $\left(\sum \frac{1}{n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Donner un encadrement du reste d'ordre n de cette série, puis un équivalent simple de ce reste.

Exercice 11

Soit $x\in\left]0,1\right[$. Convergence et somme de la série de terme général

$$x^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!\,x^k}.$$

Exercice 12

Soit $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ injective.

1. Soit $a<b$ dans $\mathbb{N}^*$ tel que $f(a)>f(b)$. Montrer que

$$\frac{f(a)}{a^2} + \frac{f(b)}{b^2} > \frac{f(b)}{a^2} + \frac{f(a)}{b^2}.$$

2. Nature de la série de terme général $\dfrac{f(n)}{n^2}$.

Exercice 13

Etudier les séries de termes généraux :

$$u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^\alpha} \text{ et } v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n} + (-1)^n}.$$

Exercice 14

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right), \text{avec } \alpha > 1.$$

a. Soient $\beta \in \left]1, \alpha\right[$ et $(v_n) = \frac{1}{n^\beta}$. Donner un développement asymptotique de $\frac{v_{n+1}}{v_n}$.

b. Comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n}$. En déduire la nature de $\sum u_n$ (*règle de Raabe – Duhamel*).

c. Soit (w_n) telle que $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{n+a}{n+b}$, avec $a, b, w_0 > 0$.

***i* –** Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $\sum w_n$ converge.

***ii* –** Etudier la suite $\left((n+b-1)w_n\right)$ lorsque $b > a+1$. On s'intéressera à $a_{n+1} - a_n$, avec $a_n = \ln\left((n+b-1)w_n\right)$.

***iii* –** Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n$ en cas de convergence.

Exercice 15

On pose lorsque cela a un sens :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin^3(nx)}{n!}.$$

Domaine de définition et calcul de S.

Exercice 16

Soient $a \in \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} - a\ln(n)$.

a. Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $u_{n+1} - u_n$.

b. Pour quelles valeurs de a la suite (u_n) est – elle convergente ?

Exercice 17

a. Limite ℓ de la suite de terme général $u_n = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$.

b. Nature de la série de terme général $u_n - \ell$.

Exercice 18

Étudier la série de terme général $\sin\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right)$.

Exercice 19

1. Question de cours : équivalent des sommes partielles de la série harmonique.

2. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$.

Donner la nature de la série de terme général $v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{n}$.

A l'aide de la formule de Stirling, rappeler la valeur de C.

Exercice 20

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $I =]-a, a[$. Dans tout l'exercice, on considère une application f de $I \times I$ dans I qui est de classe C^1 sur $I \times I$, et pour laquelle :

$$\exists\, k \in]0,1[\;/\; \forall (x, y) \in I \times I, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq k.$$

Q1_ Soit $\big((x, y), (x_0, y_0)\big) \in (I \times I)^2$.

On définit l'application φ sur $[0, 1]$ par :

$$\varphi(t) = f\big((1-t)x_0 + tx, (1-t)y_0 + ty\big).$$

a_ Montrer que φ est dérivable sur $[0, 1]$, et exprimer sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f.

b_ En déduire que :

$$\big| f(x, y) - f(x_0, y_0) \big| \leq k \,.\, \max\big(|x - x_0|, |y - y_0| \big).$$

Q2_ Soit $(\alpha, \beta) \in I \times I$. On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \alpha$, $u_1 = \beta$, et par les relations de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\; u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $a_n = \max\big(|u_{n+2} - u_{n+1}|, |u_{n+1} - u_n| \big)$.

a_ Etudier la monotonie de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

b_ Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\; a_{n+2} \leq k \,.\, a_n$.

c_ Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ est convergente.

d_ Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Q3_ Montrer que la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne dépend pas du couple (α, β).

Exercice 21

Q1_ Pour quelles valeurs du réel t la série $\sum_{n \geq 1} e^{-t\sqrt{n}}$ est – elle convergente ? *On pose alors* $g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-t\sqrt{n}}$.

Q2_ Montrer que g est décroissante sur son domaine de définition.

Q3_ Déterminer $\lim_{t \to +\infty} g(t)$.

Q4_ **a_** Déterminer $\lim_{t \to 0^+} g(t)$.

b_* Donner un équivalent de $g(t)$ lorsque t tend vers 0^+.

Exercice 22

Nature des séries suivantes, dans lesquelles a est un reél fixé:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^a + \left(\frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}\right)^a + \left(\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}\right)^a + \cdots,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^a + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^a + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^a + \cdots.$$

Exercice 23

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite à termes réels strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose:

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n}, \quad w_n = \frac{u_n}{1+nu_n}, \quad t_n = \frac{u_n}{1+n^2u_n}.$$

Comparer les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} t_n$.

Exercice 24

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite à termes réels positifs. Montrer que, si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge, la série de terme général $\sqrt{u_n u_{n+1}}$ converge. Montrer que la réciproque est fausse en général, mais qu'elle est vraie lorsque la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

Exercice 25

Nature de la série $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$, où:

$$u_n = \prod_{p=2}^{n} (2 - \sqrt[p]{e}).$$

Exercice 26

Nature de la série:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right) \right]^a,$$

où a est un réel fixé.

Exercice 27

Soient $p \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_p \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose:

$$u_n = \sum_{j=0}^{p} a_j \ln(n+j).$$

À quelle condition la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge-t-elle? Calculer alors la somme de cette série.

Exercice 28

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle telle que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$ converge. Montrer que la série suivante converge:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{S_n^2}{n^2},$$

où $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On pourra utiliser le procédé de sommation d'Abel.

Exercice 29

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ une série divergente, à termes réels positifs. Montrer qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 0}$ de réels strictement positifs, convergeant vers 0 en décroissant, et telle que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n a_n$ soit encore divergente.

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ une série à termes réels.

1. On suppose que la série est *semi-convergente*. Montrer que, pour tout élément ℓ de $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cap \{-\infty, +\infty\}$, il existe une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que l'on ait:

$$\lim_{N\to+\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} u_{\sigma(n)} \right) = \ell.$$

Ce résultat est appelé *théorème de Riemann*.

2. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) la série $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ converge;

(ii) pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$ converge.

Si ces conditions sont vérifiées et si σ est une permutation de $\mathbb{N}$, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$ est en fait indépendante de σ. On dit alors que la série donnée est *commutativement convergente*. Ainsi, la convergence absolue est équivalente à la convergence commutative.