Lycée Lakanal

2024- 2025

Colles PC

Semaine 8

Suites et séries de fonctions

Exercice 1

On pose si possible $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + n^4 x^2}$.

a. Définition et continuité de f.

b. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

c. Etudier la dérivabilité de f en 0. On sera amené à calculer :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(1 + x^2 t^2\right)^2}.$$

Exercice 2

Soit $g : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t}{1 + n^2 t^2}$.

a. Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}^*$.

b. Déterminer la limite de g en 0^+.

Exercice 3

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, u_n la fonction $u_n : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\arctan n x}{n^2} \end{array} \right.$. Soit $f = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f est continument dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 4

Montrer que

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \sin n x}{n} = \arctan\left(\frac{x \sin x}{1 - x \cos x}\right).$$

Exercice 5

Pour $f \in C\left(\left[0,1\right], \mathbb{R}\right)$, on note $\Phi f : \left(\begin{array}{ccc} \left[0,1\right] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$.

a. Montrer que : $\forall f \in C\left(\left[0,1\right], \mathbb{R}\right)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \left[0,1\right]$:

$$\Phi^n f(x) = \int_0^x \frac{f(t)(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}t.$$

b. Étudier la série de fonctions $\left(\sum \Phi^n f\right)_{n \geq 1}$.

Exercice 6

Pour $x \in \left[-1,1\right]$, et $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_0(x) = x$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_{n+1}(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{2} u_n(x)\right).$$

Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge normalement sur $\left[-1,1\right]$.

Exercice 7

Soit $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels telle que la série $\sum_{n\geq 1} n\, a_n$ converge absolument.

Pour tout $(x, y)\in[0,\pi]^2$, on pose $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n \sin(n x)$ et

$g(x, y)=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(n x)\sin(n y)$.

Montrer que f est positive sur $[0,\pi]$ si et seulement si g est positive sur $[0,\pi]^2$.

Exercice 8

Soit $f : x\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\ln(n x)}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f. *On se place désormais sur* $]1,+\infty[$.

2. Prouver que f est continue sur $]1,+\infty[$. Etudier ses limites en 1 et en $+\infty$.

3. Montrer que f est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$, et établir son tableau de variation.

Exercice 9

Soit $f_n : t\mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{int}}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur tout segment de $]0, 2\pi[$.

On pourra écrire que $\mathrm{e}^{ikt}=\left(S_k(t)\right)-\left(S_{k-1}(t)\right)$, avec $S_k(t)=\sum_{p=1}^{k}\mathrm{e}^{ipt}$.

2. En déduire que f est continue sur $]0, 2\pi[$.

Exercice 10

Pour $x\geq 0$ et $n\geq 1$, on pose $f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{n}\,(x+n)}$.

1. Montrer que la série de fonctions de terme général f_n est simplement Convergente sur $\mathbb{R}_+$. On note f sa somme.

2. Montrer que $\sum f_n$ est normalement convergente sur $[0, M]$ pour tout $M>0$. Est – elle normalement convergente sur $\mathbb{R}_+$?

3. Montrer que f est continue, dérivable et croissante sur $\mathbb{R}_+$.

4. Soient $n\geq 1$ et $x_0\geq n$. Montrer que $f(x_0)\geq \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2\sqrt{k}}$. En déduire que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

5. Montrer que $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

Exercice 11

Soit la série de fonctions $S : x\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x}{x^2+n^2}$.

1. Montrer que S définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer la limite de S en $+\infty$.

Exercice 12

Soient $a>1$ et, pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$f_n :]n,+\infty[\,\to\mathbb{R},\ x\mapsto \sqrt{x}\,(x-1)\cdots(x-n)\,a^{-x}$.

Montrer que f atteint son maximum en un unique $x_n\in\,]n,+\infty[$.

Déterminer la limite de la suite $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Donner un équivalent de x_n