DS N°3

Corrigé

Problème 1

1. Si $x<0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x)=+\infty$; si $x=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x)=\ln 2$: dans ces deux cas, la série de terme général $u_n(x)$ diverge grossièrement. Si $x>0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-nx}=0$, donc $u_n(x)=\ln(1+e^{-nx}) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-nx}$: par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série de terme général $u_n(x)$ converge. En conclusion, $D_f=]0,+\infty[$.

2. Soit $a>0$. Pour $x\in[a,+\infty[$, on a $\forall n\in\mathbb{N}\quad 0\leq \ln(1+e^{-nx})\leq \ln(1+e^{-na})$ (terme général d'une série convergente). La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge donc normalement sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$. Les fonctions u_n étant continues, on en déduit la continuité de la somme f sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction u_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (par addition d'inégalités de même sens, l'une au moins étant stricte).

4. C'est le théorème des valeurs intermédiaires : l'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.

Comme f est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut préciser que f établit une bijection de $]0,+\infty[$ vers $\mathcal{E}$, et que $\mathcal{E}=f(]0,+\infty[)=\left]\lim\limits_{+\infty} f\ ,\ \lim\limits_{0+} f\right[$.

5. La série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge normalement donc uniformément sur $[1,+\infty[$; $\lim\limits_{x\to+\infty} u_0(x)=\ln 2$ et, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n(x)=0$. Par le théorème de la double limite, on déduit que $\lambda=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ln 2$.

6. Pour tout $x>0$ fixé, la fonction ψ_x est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, donc

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad \psi_x(n+1)\leq\int_n^{n+1}\psi_x(t)\,\mathrm{d}t\leq\psi_x(n)\ .$$

On en déduit que

$$\int_n^{n+1}\psi_x(t)\,\mathrm{d}t\leq\psi_x(n)=u_n(x)\leq\int_{n-1}^{n}\psi_x(t)\,\mathrm{d}t$$

(la première inégalité est vraie pour tout n entier naturel, la deuxième à partir du rang 1). En sommant ces inégalités (les séries et intégrales impropres étant convergentes d'après le théorème de comparaison séries-intégrales), on obtient

$$\int_0^{+\infty}\psi_x(t)\,\mathrm{d}t\leq\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)=f(x)\leq\ln 2+\int_0^{+\infty}\psi_x(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

7.a. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : x\mapsto\dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ est continue sur $[0,1]$. Pour $x\in[0,1]$, la suite $\left(\dfrac{x^n}{n}\right)_{n\geq 1}$ est décroissante, positive, et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. D'après le théorème spécial des séries alternées, la série $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ converge, et en notant pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $R_n(x)=\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$:

$$\left| R_n(x) \right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \ .$$

On a donc $\left\| R_n \right\|_{\infty,[0,1]} \leq \dfrac{1}{n+1} \to 0$, ainsi la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

Il en résulte que φ est définie et continue sur $[0,1]$.

b. D'après la question précédente, la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément, donc simplement, sur $[0,1[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe C^1 sur $[0,1[$, de dérivée $f_n' : x \mapsto (-1)^{n-1} x^{n-1}$.

Pour tout $a \in [0,1[$ et pour tout $x \in [0, a]$, $\left| f_n'(x) \right| \leq a^{n-1}$. La série géométrique $\sum a^{n-1}$ converge, donc la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 1} f_n'$ converge normalement sur $[0, a]$. D'après le théorème de dérivation d'une somme de série de fonctions (version locale) : φ est de classe C^1 sur $[0,1[$, et pour tout $x \in [0,1[$:

$$\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} .$$

c. Pour $x \in [0,1[$, la série $\sum\limits_{n \geq 1} (-1)^{n-1} x^{n-1}$ est géométrique, convergente car $\left| (-1)^{n-1} x^{n-1} \right|$. On a :

$$\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = \frac{1}{1+x} \ .$$

Par intégration, il existe un réel C telle que pour tout $x \in [0,1[$, $\varphi(x) = \ln(1+x) + C$.

Comme $\varphi(0) = 0$, la constante C est nulle, on a donc pour tout $x \in [0,1[$, $\varphi(x) = \ln(1+x)$.

Par continuité, ce résultat reste vrai pour $x = 1$: pour tout $x \in [0,1]$, $\varphi(x) = \ln(1+x)$.

8.a. La fonction $\psi : y \mapsto \dfrac{\ln(1+y)}{y}$ est continue sur $]0,1]$, et se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$ (car $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\ln(1+y)}{y} = 1$). On note encore ψ ce prolongement.

D'après ce qui précède, on a pour tout $y \in [0,1]$ (même pour $y = 0$), $\psi(y) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} y^{n-1}}{n}$.

Les fonctions $y \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1} y^{n-1}}{n}$ sont continues sur $[0,1]$, et la série de fonctions $y \mapsto \sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{(-1)^{n-1} y^{n-1}}{n}$ converge uniformément sur $[0,1]$ (même démonstration qu'en **7.a.**). D'après le théorème d'intégration terme à terme, la série $\sum\limits_{n \geq 1} \displaystyle\int_0^1 \dfrac{(-1)^{n-1} y^{n-1}}{n} \, dy$ converge, et l'on a :

$$\int_0^1 \psi(y) \, dy = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^{n-1} y^{n-1}}{n} \, dy \text{, soit : } \int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y} \, dy = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \theta(2) .$$

b. Le changement de variable $y = e^{-tx}$ donne
$$\int_0^{+\infty} \psi_x(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \ln(1+e^{-tx})\,\mathrm{d}t = -\int_1^0 \frac{\ln(1+y)}{xy}\,\mathrm{d}y = \frac{\theta(2)}{x}\ .$$
La question **6.** donne alors
$$\frac{\theta(2)}{x} \le f(x) \le \ln 2 + \frac{\theta(2)}{x}\ ,$$
soit l'encadrement recherché avec $\lambda = \ln 2$ et $\mu = \theta(2) = \dfrac{\pi^2}{12}$.

c. Donc $\theta(2) \le x\,f(x) \le x\,\ln 2 + \theta(2)$ et $\lim\limits_{x\to 0+} x\,f(x) = \theta(2) = \dfrac{\pi^2}{12}$. Donc $f(x) \sim \dfrac{\pi^2}{12x}$ lorsque $x \to 0^+$, et notamment $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = +\infty$. Ainsi, $\mathcal{E} =]\ln 2, +\infty[$.

Problème 2

1. Pour tout $x < 0$, on a par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{-nx}}{n^2+1} = +\infty$, donc la série $\sum\limits_{n\ge 1} \dfrac{e^{-nx}}{n^2+1}$ diverge grossièrement.

D'autre part, les fonctions $f_n : x \mapsto \dfrac{e^{-nx}}{n^2+1}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$|f_n(x)| \le \dfrac{1}{n^2}$. La série de Riemann $\sum\limits_{n\ge 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge, $\sum\limits_{n\ge 1} f_n$ est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}_+$.

On en déduit que le domaine de définition de f est $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+$, et d'après le théorème de continuité d'une somme de série de fonctions, que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. On a les résultats suivants :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.
- $\sum\limits_{n\ge 1} f_n$ est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}_+$.

D'après le théorème de la double limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.

3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On a les résultats suivants :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe C^p sur $\mathcal{D}' = \mathbb{R}_+^*$, avec pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k\, n^k\, e^{-nx}}{n^2+1}\ .$$

- Pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, par croissances comparées :

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 f_n^{(k)}(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^k\, n^{k+2}\, e^{-nx}}{n^2+1} = 0$, donc $f_n^{(k)}(x) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. La convergence absolue de la série de Riemann $\sum\limits_{n\ge 1} \dfrac{1}{n^2}$ assure alors que la série de fonctions $\sum\limits_{n\ge 1} f_n^{(k)}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in [a, +\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left| f_n^{(p)}(x) \right| \leq \dfrac{n^p e^{-na}}{n^2+1}$, or la série $\sum_{n \geq 1} \dfrac{n^p e^{-na}}{n^2+1}$ converge (même démonstration que pour le point précédent). La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n^{(p)}$ est donc normalement convergente sur $[a, +\infty[$.

D'après le théorème de dérivation d'une somme de série de fonctions (version C^p et locale), f est de classe C^p sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ceci étant vrai pour tout p, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$. En outre, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k n^k e^{-nx}}{n^2+1}.$$

4. D'après la question précédente :

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) + f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^2 e^{-nx}}{n^2+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{e^{-nx}}{n^2+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}$.

On reconnaît une série géométrique (convergente), et l'on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f''(x) + f(x) = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}.$$

5. D'après **4.**, f est solution (particulière) sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle

$$(\mathbf{E}): \qquad y''(x) + y(x) = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}.$$

Les solutions de l'équation homogène $y''(x) + y(x) = 0$ sont les fonctions $x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$ ($(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, donc les solutions de $(\mathbf{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $f_{\lambda,\mu}(x) \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) + f(x)$.

D'après **2.**, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. D'autre part, pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$:

$$\lim_{x \to +\infty} f_{\lambda,\mu}(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{n \to +\infty} f_{\lambda,\mu}(2n\pi) = 0 \\ \lim_{n \to +\infty} f_{\lambda,\mu}\left(2n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{n \to +\infty} (\lambda + f(2n\pi)) = 0 \\ \lim_{n \to +\infty} \left(\lambda + f\left(2n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \mu = 0 \Rightarrow f_{\lambda,\mu} = f$$

La fonction f est donc la seule solution de $(\mathbf{E})$ qui tend vers 0 en $+\infty$.

6. En isolant le premier terme, on peut écrire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{e^{-nx}}{n^2+1}$.

Or $0 \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{e^{-nx}}{n^2+1} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-nx} = \dfrac{e^{-2x}}{1-e^{-x}} \underset{+\infty}{\sim} e^{-2x} \underset{+\infty}{=} o\left(e^{-x}\right)$.

On en déduit que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{2} e^{-x}$.

7.a. La série $\sum_{n \geq 1} \dfrac{n}{n^2+1}$ est à terme général positif et diverge (car $\dfrac{n}{n^2+1} \sim \dfrac{1}{n}$), donc la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$. Par conséquent, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $p \geq N$, $\sum_{n=1}^{p} \frac{n}{n^2+1} \geq A+1$ (et l'on a alors en particulier : $\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{n^2+1} \geq A+1$).

b. La fonction $\psi : x \mapsto \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{n^2+1} \mathrm{e}^{-nx}$ est continue en 0, et, d'après **a.**, $\psi(0) \geq A+1$. Il existe donc un réel strictement positif α tel que pour tout $x \in [0, \alpha[$ (et donc pour tout $x \in]0, \alpha[$), $\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{n^2+1} \mathrm{e}^{-nx} \geq A$.

c. Pour tout $x \in]0, \alpha[$, on a : $-f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1} \mathrm{e}^{-nx} \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{n^2+1} \mathrm{e}^{-nx} \geq A$.

Ainsi : pour tout $A > 0$, $\exists\, \alpha > 0$, $-f'(x) \geq A$.

Il en résulte que $\lim_{x \to 0} f'(x) = -\infty$, et, d'après le théorème de (non) prolongement de la dérivée, ceci entraîne que f n'est pas dérivable en 0.