DS N°3

Partie analytique

Problème 1

Pour tout entier naturel n et tout nombre réel x, on note $u_n(x) = \ln\left(1 + e^{-nx}\right)$.

Pour tout nombre réel x tel que la série $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ converge, on note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ la somme de cette série. On se propose d'étudier quelques propriétés de la fonction f. On pose $\theta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, et l'on admet que $\theta(2) = \frac{\pi^2}{12}$.

3. Montrer que la fonction f est strictement monotone sur $]0, +\infty[$.
4. Justifier l'affirmation : "$\mathscr{E}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$"
5. Montrer que la fonction f admet une limite finie λ (que l'on précisera) en $+\infty$.
6. Pour tout nombre réel x strictement positif, on désigne par ψ_x la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\psi_x(t) = \ln\left(1 + e^{-tx}\right)$$

Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi_x(t)\,dt$, et établir, pour tout nombre réel $x > 0$, la double inégalité :

$$\int_0^{+\infty} \psi_x(t)\,dt \leq f(x) \leq \ln 2 + \int_0^{+\infty} \psi_x(t)\,dt$$

1. Montrer que la fonction f est définie sur $]0, +\infty[$.
On note désormais $\mathscr{E}$ l'image par f de l'intervalle $]0, +\infty[$.
2. Montrer que la fonction f est continue sur $]0, +\infty[$

7. Soit $\varphi : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1)^{n-1} x^n}{n}$.

a. Montrer que φ est définie et continue sur $[0, 1]$.

b. Montrer que φ est de classe C^1 sur $[0, 1[$.

c. Montrer alors que pour tout $x \in [0, 1]$, $\varphi(x) = \ln(1 + x)$.

8. En utilisant les résultats précédents :

(a) Montrer l'existence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y}\,dy$ et exprimer sa valeur en fonction de $\theta(2)$

(b) Montrer qu'il existe une constante μ (que l'on précisera) telle que pour tout nombre réel x strictement positif, on ait la double inégalité :

$$\frac{\mu}{x} \leq f(x) \leq \lambda + \frac{\mu}{x}$$

(c) En déduire la limite de $xf(x)$ lorsque x tend vers 0 et préciser l'intervalle $\mathscr{E}$.

Problème 2

On pose, quand c'est possible :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2+1}$$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la fonction f, et prouver que f est continue sur $\mathcal{D}$.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. Montrer que f est de classe C^∞ sur une certaine partie $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$ que l'on déterminera.

4. Calculer $f + f''$ sur $\mathcal{D}'$ (le résultat attendu ne comporte pas de signe somme).

5. Prouver que f est la seule solution de l'équation différentielle ainsi obtenue qui tend vers 0 en $+\infty$.

6. Montrer que :

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2} e^{-x}$$

7. Soit un réel A strictement positif.

a. Prouver l'existence d'un entier N tel que $\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{n+1} \geq A+1$.

b. Montrer qu'il existe un réel α strictement positif tel que pour tout $x \in]0, \alpha[$, $\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{n+1} e^{-nx} \geq A$.

c. Minorer $-f'(x)$ pour $x \in]0, \alpha[$. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?