DS N°3 , partie algébrique

On laissera impérativement en tête de devoir une place suffisante pour les commentaires (au moins 10 lignes). On laissera non moins impérativement libre une marge de taille raisonnable.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

*Seuls les résultats **encadrés** ou **soulignés** seront pris en considération.*

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

- Dans tout ce problème, n désignera un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 , et E un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel de dimension n.

- On note Id_E l'identité de E et Θ l'endomorphisme nul de E.

- On notera I_n la matrice identité d'ordre n, et, pour tout couple (p, q) d'entiers naturels non nuls, on note $0_{p,q}$ la matrice nulle ayant p lignes et q colonnes.

- Pour tout endomorphisme u de E, on appelle ***commutant** de* u, que l'on note $\mathcal{C}(u)$, l'ensemble des endomorphismes v de E commutant avec u, c'est – à – dire :

$$\mathcal{C}(u) = \left\{ v \in \mathcal{L}(E) \ / \ u \circ v = v \circ u \right\}.$$

  De manière analogue, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle ***commutant** de* M, que l'on note $\mathcal{C}(M)$, l'ensemble des matrices N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commutant avec M, c'est – à – dire :

$$\mathcal{C}(M) = \left\{ N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ N M = M N \right\}.$$

- Pour tout endomorphisme u de E, et pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on note $P(u)$ l'endomorphisme de E défini par :

$$P(u) = \sum_{k=0}^{p} a_k u^k = a_0 Id_E + a_1 u + a_2 u \circ u + \ldots + a_p \underbrace{u \circ u \circ \ldots \circ u}_{p \text{ fois}}.$$

On dit que P est un polynôme annulateur de u lorsque $P(u) = \Theta$.

On note $\mathbb{R}[u]$ l'ensemble des endomorphismes v de E s'écrivant comme polynôme en u,

c'est – à – dire : $\mathbb{R}[u] = \left\{ v \in \mathcal{L}(E) \ / \ \exists P \in \mathbb{R}[X], \quad v = P(u) \right\}$.

- De même, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on

  note $P(M)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par :

$$P(M) = \sum_{k=0}^{p} a_k M^k = a_0 I_n + a_1 M + a_2 M^2 + \ldots + a_p M^p ,$$

  et l'on dit que P est un polynôme annulateur de M lorsque $P(M) = 0_{n,n}$.

  On note $\mathbb{R}[M]$ l'ensemble des matrices N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrivant comme polynômes en M,

  c'est – à – dire : $\mathbb{R}[M] = \left\{ N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ \exists P \in \mathbb{R}[X], \quad N = P(M) \right\}$.

Le but de ce problème est d'étudier, dans certains cas particuliers, le commutant d'un endomorphisme ou d'une matrice.

Partie I

Considérations préliminaires et exemples

1.a. Montrer que pour tout endomorphisme u de E, $\mathcal{C}(u)$ est un espace vectoriel.

b. Vérifier que pour tout endomorphisme u de E, on a : $\mathbb{R}[u] \subset \mathcal{C}(u)$.

c. Déterminer les ensembles $\mathcal{C}(\Theta)$ et $\mathcal{C}(Id_E)$.

2. ***Un premier exemple***

Dans cette question, et dans cette question **2.** seulement, on suppose que $n = 3$.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E, et l'on considère l'endomorphisme u de E dont la matrice

dans la base $\mathcal{B}$ est $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$, où a, b et c sont trois réels fixés.

a. Montrer que $\left(e_1, u(e_1), u^2(e_1) \right)$ est une base de E.

b. Soit v un endomorphisme de E tel que $v \in \mathcal{C}(u)$. On note α, β et γ les coordonnées

du vecteur $v(e_1)$ dans la base $\left(e_1, u(e_1), u^2(e_1) \right)$ de E, c'est – à – dire les trois réels vérifiant

$v(e_1) = \alpha\, e_1 + \beta\, u(e_1) + \gamma\, u^2(e_1)$.

On définit l'endomorphisme ϕ de E par : $\phi = v - \alpha\, Id_E - \beta\, u - \gamma\, u^2$.

i – Que vaut $\phi(e_1)$? Calculer $\phi(u(e_1))$ et $\phi(u^2(e_1))$.

ii – Montrer que $\phi = \Theta$.

c. Déduire de ce qui précède que $C(u) = \mathbb{R}[u]$.

3. ***Un deuxième exemple dans la foulée***

Dans cette question, et dans cette question **3.** seulement, on suppose que $E = \mathbb{R}_2[X]$, et l'on considère l'endomorphisme u de E dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ de cet espace est $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer une base de $\text{Ker}(u - Id_E)$ et une base de $\text{Ker}(u - 2\, Id_E)$.

b. En déduire une matrice M inversible, et deux réels a, b, tels que $M = P^{-1}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} P$.

c. Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que N commute avec $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ si et seulement si il existe $x, y, z, t, w \in \mathbb{R}$ tels que $N = \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ z & t & 0 \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix}$.

d. Déduire de ce qui précède la dimension de $C\left(\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}\right)$, puis celle de $C(u)$.

e. Montrer que $u^2 - 3u + 2\, Id_E = \Theta$, puis que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que $u^n = a_n\, u + b_n\, Id_E$.

f. En déduire la dimension de $\mathbb{R}[u]$. L'égalité $C(u) = \mathbb{R}[u]$ est – elle vérifiée ?

4. Soit u un endomorphisme de E tel qu'il existe un vecteur t_0 vérifiant :

$$\mathcal{B} = \left(t_0, u(t_0), \dots, u^{n-1}(t_0) \right) \text{ est une base de } E.$$

Soit $v \in C(u)$. On note $\left(\rho_0, \dots, \rho_{n-1} \right)$ les coordonnées du vecteur $v(t_0)$ dans la base $\mathcal{B}$, c'est – à – dire que l'on a : $v(t_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \rho_k u^k (t_0)$.

a. Montrer que pour tout entier i vérifiant $1 \leq i \leq n-1$:

$$v\left(u^i (t_0) \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \rho_k u^k \left(u^i (t_0) \right).$$

b. En déduire que $v = \sum_{k=0}^{n-1} \rho_k u^k$.

c. Établir que $C(u) = \mathbb{R}[u]$.

d. On considère l'application Ψ définie par :

$$\Psi : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[u] & \to & E \\ v = P(u) & \mapsto & v(t_0) = \left(P(u) \right)(t_0) \end{array} \right.$$

i – Montrer que Ψ est une application linéaire.

ii – Montrer que Ψ est surjective.

iii – Montrer que Ψ est injective.

iv – En déduire que $\dim \left(C(u) \right) = n$.

5. ***Caractérisation des matrices M vérifiant $C(M) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$***

Soit $M = \left(m_{i,j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre n vérifiant $C(M) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tout couple (i, j) d'entiers compris entre 1 et n, on note $E_{i,j}$ la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui placé en i – ème ligne et j – ème colonne qui vaut 1.

a. En remarquant que $E_{i,i} \in C(M)$ pour $1 \leq i \leq n$, montrer que M est une matrice diagonale.

b. En considérant $E_{1,i}$ pour $2 \leq i \leq n$, montrer qu'il existe un réel α tel que $M = \alpha I_n$.

c. Conclure.

d. Quels sont les endomorphismes u de E pour lesquels $C(u) = \mathcal{L}(E)$?

Partie II

Cas d'un endomorphisme nilpotent d'ordre 2

Dans cette partie, on désignera par u un endomorphisme de E vérifiant :

$$u \neq \Theta \qquad \text{et} \qquad u^2 = \Theta.$$

On désigne par r le rang de u.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$. En déduire que $2r \leq n$.

2. ***Étude de l'endomorphisme*** u

Soit H un sous espace vectoriel de E qui est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E. On note $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de H.

a. Montrer que $(u(e_1), \ldots, u(e_r))$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$.

On complète désormais cette famille en une base de $\mathrm{Ker}(u)$ *à l'aide de* $n-2r$ *vecteurs de* $\mathrm{Ker}(u)$*, que l'on nommera* $t_1, \ldots, t_{n-2r}$.

On note alors $\mathcal{B}' = (u(e_1), \ldots, u(e_r), t_1, \ldots, t_{n-2r})$ la base de $\mathrm{Ker}(u)$ ainsi obtenue, et $\mathcal{B}$ la famille $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_r, u(e_1), \ldots, u(e_r), t_1, \ldots, t_{n-2r})$

b. Vérifier que $\mathcal{B}$ est une base de E.

c. Vérifier que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$, que l'on notera U, est égale à la matrice définie par blocs suivante :

$$U = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overleftrightarrow{\;r\;} & \overleftrightarrow{\;r\;} & \overleftrightarrow{\;n-2r\;} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_{r,r} & 0_{r,n-2r} \\ I_r & 0_{r,r} & 0_{r,n-2r} \\ 0_{n-2r,r} & 0_{n-2r,r} & 0_{n-2r,n-2r} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \updownarrow r \\ \updownarrow r \\ \updownarrow n-2r \end{array}$$

d. ***Détermination de*** $C(u)$

Soit v un endomorphisme de E dont la matrice V dans la base B est définie par blocs par :

$$V = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overleftrightarrow{\;r\;} & \overleftrightarrow{\;r\;} & \overleftrightarrow{\;n-2r\;} \end{array} \\ \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_4 & A_5 & A_6 \\ A_7 & A_8 & A_9 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \updownarrow r \\ \updownarrow r \\ \updownarrow n-2r \end{array} .$$

i – Montrer que v appartient à $C(u)$ si et seulement si : $\begin{cases} A_2 = 0_{r,r} \\ A_3 = 0_{r,n-2r} \\ A_8 = 0_{n-2r,r} \\ A_1 = A_5 \end{cases}$.

ii – En déduire que $\dim(C(u)) = n^2 - 2rn + 2r^2$.

iii – Montrer que $\dim(C(u)) \geq \frac{1}{2} n^2$, et préciser dans quel(s) cas il peut y avoir égalité.

Partie III

Commutant d'un endomorphisme vérifiant une relation polynomiale de degré 3

Dans toute cette partie, on désignera par f un endomorphisme de E vérifiant

$$(f - Id_E) \circ (f - 2\,Id_E) \neq \Theta \qquad \text{et} \qquad (f - Id_E) \circ (f - 2\,Id_E)^2 = \Theta$$

1. Montrer que $\operatorname{Ker}(f - 2\,Id_E) \subset \operatorname{Ker}(f - 2\,Id_E)^2$ et vérifier que cette inclusion est stricte.

On note :

$n_1 = \dim\left(\operatorname{Ker}(f - Id_E)\right)$, $n_2 = \dim\left(\operatorname{Ker}(f - 2\,Id_E)\right)$ *et* $n'_2 = \dim\left(\operatorname{Ker}\left((f - 2\,Id_E)^2\right)\right)$.

2.a. Montrer que la famille $\left((X-1), X(X-1), (X-2)^2\right)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

b. Déterminer alors trois réels a, b et c tels que $1 = a(X-1) + (X-1)^2(bX + c)$.

On définit deux endomorphismes ϕ_1 et ϕ_2 par les relations :

$$\phi_1 = (b\,f + c\,Id_E) \circ (f - 2\,Id_E)^2 \quad \text{et} \quad \phi_2 = a(f - Id_E),$$

ainsi que l'endomorphisme $d = \phi_1 + 2\,\phi_2$.

3.a. Montrer que $\phi_1 \circ \phi_2 = \Theta$. Que vaut $\phi_1 + \phi_2$?

b. Montrer que ϕ_1 est le projecteur dont le noyau est $\operatorname{Ker}\left((f - 2\,Id_E)^2\right)$ et dont l'image est $\operatorname{Ker}(f - Id_E)$.

c. En déduire que $E = \operatorname{Ker}(f - Id_E) \oplus \operatorname{Ker}\left((f - 2\,Id_E)^2\right)$

d. Montrer que ϕ_2 est également un projecteur dont on précisera le noyau et l'image.

e. Montrer que l'endomorphisme d est diagonalisable.

f. On pose $w = f - d$. Calculer w^2

g. Montrer que $\operatorname{Ker}(w) = \operatorname{Ker}(f - Id_E) \oplus \operatorname{Ker}(f - 2\,Id_E)$ puis que $\operatorname{rg}(w) = n'_2 - n_2$.

h. Montrer que : $C(f) = C(d) \cap C(w)$.

4. Détermination de $C(f)$ et de sa dimension

Dans toute la suite, on notera v *un élément de* $C(f)$*, et* $\mathcal{B} = \left(e_1, \dots, e_{n_1}, t_1, \dots, t_{n'_2}\right)$ *une base de* E *telle que la famille* $\left(e_1, \dots, e_{n_1}\right)$ *soit une base de* $\operatorname{Ker}\left(f - Id_E\right)$ *et la famille* $\left(t_1, \dots, t_{n'_2}\right)$ *une base de* $\operatorname{Ker}\left(\left(f - 2\,Id_E\right)^2\right)$.

a. Montrer qu'il existe une matrice carrée N d'ordre n'_2 telle que la matrice W de w dans la base $\mathcal{B}$ soit :

$$W = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \xleftrightarrow{n_1} & \xleftrightarrow{n'_2} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0_{n_1, n_1} & 0_{n_1, n'_2} \\ 0_{n'_2, n_1} & N \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \updownarrow n_1 \\ \updownarrow n'_2 \end{array} \end{array}$$

b. En déduire que le rang de N est égal à , $n'_2 - n_2$ et montrer que $N^2 = 0_{n'_2, n'_2}$

c. Montrer qu'il existe deux matrices V_1 et V_2 telles que la matrice V de v dans la base $\mathcal{B}$ s'écrive par blocs :

$$V = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \xleftrightarrow{n_1} & \xleftrightarrow{n'_2} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} V_1 & 0_{n_1, n'_2} \\ 0_{n'_2, n_1} & V_2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \updownarrow n_1 \\ \updownarrow n'_2 \end{array} \end{array} ,$$

et vérifiant $V_2\, N = N\, V_2$

d. Réciproquement, montrer qu'un endomorphisme v défini par une matrice dans la base $\mathcal{B}$ donnée par blocs par $\begin{pmatrix} V_1 & 0_{n_1, n'_2} \\ 0_{n'_2, n_1} & V_2 \end{pmatrix}$ avec $V_1 \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{R})$ et $V_2 \in C(N)$, appartient à $C(f)$.

e. En déduire la dimension de $C(f)$ en fonction de n_1, n_2 et n'_2.

Corrigé

Partie I

Considérations préliminaires et exemples

1.a. $\mathcal{C}(u)$ est évidemment inclus dans $\mathcal{L}(E)$, montrons donc qu'il est un sous – espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

- $\Theta \in \mathcal{C}(u)$ est évident : on a bien $\Theta \circ u = \Theta = u \circ \Theta$.

- • Soient ensuite v_1, v_2 deux éléments de $\mathcal{C}(u)$ et α_1, α_2 deux réels. Alors :

$$\begin{aligned}\left(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2\right) \circ u &= \alpha_1 v_1 \circ u + \alpha_2 v_2 \circ u && \text{par distributivité}\\ &= \alpha_1 u \circ v_1 + \alpha_2 u \circ v_2 && \text{car } v_1 \text{ et } v_2 \text{ appartiennent à } \mathcal{C}(u)\\ &= u \circ \left(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2\right) && \text{par linéarité de } u,\end{aligned}$$

Donc $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in \mathcal{C}(u)$. $\mathcal{C}(u)$ est donc un sous – espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, et par suite

$\boxed{\mathcal{C}(u) \text{ est un espace vectoriel}}$.

b. $Id_E \in \mathcal{C}(u)$ donc $u^0 \in C(u)$. Pour $k \geq 1$, on a $u \circ u^k = u^{k+1} = u^k \circ u$, donc $u^k \in \mathcal{C}(u)$.

$\mathcal{C}(u)$ étant un espace vectoriel, toutes les combinaisons linéaires des u^k pour $k \in \mathbb{N}$ sont encore dans $\mathcal{C}(u)$, donc tout endomorphisme polynomial en u est dans $\mathcal{C}(u)$.

Il en résulte que $\boxed{\mathbb{R}[u] \subset \mathcal{C}(u)}$.

c. Tout endomorphisme commute avec Θ et avec Id_E. On a donc $\mathcal{C}(\Theta) = \mathcal{C}\left(Id_E\right) = \mathcal{L}(E)$.

2. ***Un premier exemple***

a. On "lit" sur la matrice que $u\left(e_1\right) = e_2$, et que $u^2\left(e_1\right) = u\left(e_2\right) = e_3$.

La famille $\left(e_1, u\left(e_1\right), u^2\left(e_1\right)\right)$ est donc tout simplement la famille $\left(e_1, e_2, e_3\right)$.

C'est par hypothèse une base de E : $\boxed{\left(e_1, u\left(e_1\right), u^2\left(e_1\right)\right) \text{ est une base de } E}$.

b. ***i –*** • Par définition des réels α, β et γ :

$$\boxed{\phi(e_1) = v(e_1) - \alpha e_1 - \beta u(e_1) - \gamma u^2(e_1) = 0_E}.$$

• • L'appartenance de v à $C(u)$ permet de faire commuter u et v, et d'obtenir :

$$\phi\left(u(e_1)\right) = v\left(u(e_1)\right) - \alpha u(e_1) - \beta u^2(e_1) - \gamma u^3(e_1)$$
$$= (u \circ v)(e_1) - \alpha u(e_1) - \beta u^2(e_1) - \gamma u^3(e_1) = u\left(\phi(e_1)\right) = u(0_E) = 0_E.$$

• • • De même, en faisant commuter u et v deux fois :

$$\phi\left(u^2(e_1)\right) = v\left(u^2(e_1)\right) - \alpha u^2(e_1) - \beta u^3(e_1) - \gamma u^4(e_1)$$
$$= (u^2 \circ v)(e_1) - \alpha u^2(e_1) - \beta u^3(e_1) - \gamma u^4(e_1) = u^2\left(\phi(e_1)\right) = 0_E.$$

Ainsi, $\boxed{\phi\left(u^2(e_1)\right) = \phi\left(u(e_1)\right) = 0_E}$.

ii – L'application ϕ envoie tous les vecteurs de la base $\left(e_1, u(e_1), u^2(e_1)\right)$ sur 0_E. C'est donc l'endomorphisme nul (sa matrice dans la base $\left(e_1, u(e_1), u^2(e_1)\right)$ est la matrice nulle) : $\boxed{\phi = \Theta}$.

c. Dans la question **1.b.** , on a déjà prouvé que $\mathbb{R}[u] \subset C(u)$.

Dans la question précédente, on a prouvé que si $v \in C(u)$, alors $\phi = \Theta$, c'est – à – dire que $v = \alpha\, Id_E + \beta u + \gamma u^2$. On a donc $v \in \mathbb{R}[u]$, d'où ici $C(u) \subset \mathbb{R}[u]$.

On en conclut, par double inclusion, que $\boxed{C(u) = \mathbb{R}[u]}$.

3. *Un deuxième exemple dans la foulée*

a. et **b.** On peut évidemment utiliser la méthode du pivot de Gauss... comme d'habitude, il est préférable de lire la suite de l'énoncé, et d'en tirer les conclusions idoines :

• La question **e.** qui suit laisse penser que les valeurs propres de u sont les racines de $X^2 - 3X + 2$, à savoir 1 et 2. On vérifie :

• • La matrice $M - I_n = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ est non inversible, car ses colonnes sont colinéaires, et ceci prouve que 1 est bien valeur propre de M, donc de u. Plus précisément, $M - I_n$ est de rang 1 (colonnes proportionnelles, non nulles), le théorème du rang assure alors que la dimension de l'espace propre de u associé à la valeur propre 1, $E_1(u)$, est donnée par :

$$\dim\left(E_1(u)\right) = \dim\left(\mathbb{R}_2[X]\right) - \mathrm{rg}\left(u - Id_{\mathbb{R}_2[X]}\right) = 3 - \mathrm{rg}(M) = 2 .$$

On précise encore en détaillant les raisons pour lesquelles $M - I_n$ est de rang 1, et en en tirant une base de $E_1(u)$: les colonnes C_1, C_2, C_3 de la matrice :

$$M - I_n = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \left(u - Id_{\mathbb{R}_2[X]}\right)(1) & \left(u - Id_{\mathbb{R}_2[X]}\right)(X) & \left(u - Id_{\mathbb{R}_2[X]}\right)(X^2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \end{array}$$

vérifient $2C_1 + C_2 = 0_{3,1}$ et $2C_1 + C_3 = 0_{3,1}$, ce qui signifie que $\left(u - Id_{\mathbb{R}_2[X]}\right)(2 + X) = 0$ et $\left(u - Id_{\mathbb{R}_2[X]}\right)(2 + X^2) = 0$.

Les polynômes $2 + X$ et $2 + X^2$ appartiennent donc à $E_1(u)$; ils forment une famille libre, car ils sont non proportionnels, une famille libre de cardinal 2 dans un espace vectoriel de dimension 2 étant automatiquement une base de cet espace, $\boxed{\left(2 + X, 2 + X^2\right) \text{ est une base de } E_1(u)}$.

••• $M - 2I_n = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ est non inversible, car ses colonnes C'_1, C'_2, C'_3 vérifient la relation de dépendance linéaire $C'_1 - C'_2 + C'_3 = 0_{3,1}$. On en déduit, comme précédemment, que 2 est valeur propre de u, et que $1 - X + X^2$ appartient au sous – espace propre associé $E_2(u)$.

On sait que la somme des dimensions des sous – espaces propres de u est inférieure ou égale à $3 = \dim\left(\mathbb{R}_2[X]\right)$, et l'on a $\dim\left(E_1(u)\right) = 2$, et bien sûr $\dim\left(E_2(u)\right) \geq 1$. Par conséquent :

- ∗ $E_2(u)$ est de dimension 1 (*on aurait également pu obtenir ceci en expliquant pourquoi $M - 2I_n$ est de rang* 2), et il s'ensuit que $\boxed{\left(1 - X + X^2\right) \text{ est une base de } E_2(u)}$.
- ∗ Les seules valeurs propres de u sont 1 et 2 : $\boxed{\mathrm{Spec}(u) = \{1;2\}}$.
- ∗ $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(u)} \dim\left(E_\lambda(u)\right) = \dim\left(E_1(u)\right) + \dim\left(E_2(u)\right) = 3 = \dim\left(\mathbb{R}_2[X]\right)$, donc $\boxed{u \text{ est diagonalisable}}$.
- ∗ La famille $\mathcal{B}' = \left(2 + X, 2 + X^2, 1 - X + X^2\right)$, obtenue par concaténation d'une base

de $E_1(u)$ et d'une base de $E_2(u)$, est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ est la matrice Q des coordonnées des polynômes de $\mathcal{B}'$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$: $Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice est donc inversible, et la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$ est $P = Q^{-1}$.

La formule de changement de base donne $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = Q^{-1} M Q$, ou encore, puisque l'énoncé imposait ce sens : $\boxed{M = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P}$.

Il reste à déterminer $P = Q^{-1}$. La méthode de Gauss donne $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}}$.

On notera dans la suite de cette question **3.** : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

c. Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, posons $N = \begin{pmatrix} x & y & e \\ z & t & f \\ g & h & w \end{pmatrix}$.

On a : $N D = \begin{pmatrix} x & y & e \\ z & t & f \\ g & h & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 2e \\ z & t & 2f \\ g & h & 2w \end{pmatrix}$,

et : $D N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & e \\ z & t & f \\ g & h & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & e \\ z & t & f \\ 2g & 2h & 2w \end{pmatrix}$.

On en conclut immédiatement que $N D = D N \Leftrightarrow e = f = g = h = 0$: ainsi,

$\boxed{N \text{ commute avec } D \text{ si et seulement si il existe } x, y, z, t, w \in \mathbb{R} \text{ tels que } N = \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ z & t & 0 \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix}}$.

d. • D'après la question précédente :

$$C(D) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ z & t & 0 \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix}, x, y, z, t, w \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. + t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x, y, z, t, w \in \mathbb{R} \right\},$$

donc $C(D) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.

La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre (elle est constituée de matrices élémentaires, c'est donc une sous – famille de la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$) ; il s'ensuit que $\mathcal{F}$ est une base de $C(D)$, et donc que $\boxed{\dim(C(D)) = 5}$.

• • Soit $v \in \mathcal{L}(E)$, et soit N sa matrice dans la base $\mathcal{B}'$ de E. u admet D pour matrice dans cette même base, donc v commute avec u si et seulement si N commute avec D.

Autrement dit, $C(u) = \{ v \in \mathcal{L}(E) \ / \ \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(v) \in C(D) \}$.

L'application $\Phi : \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ v & \mapsto & \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(v) \end{array} \right)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, et l'on a $C(D) = \Phi(C(u))$. Il s'ensuit que $\boxed{\dim(C(u)) = \dim(C(D)) = 5}$.

e. • $D^2 - 3D + 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 0_3$. La matrice de $u^2 - 3u + 2\,Id_E$ dans la base $\mathcal{B}'$ de E est nulle, donc $u^2 - 3u + 2\,Id_E$ est l'endomorphisme nul : $u^2 - 3u + 2\,Id_E = \Theta$.

• • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété $\mathcal{H}(n)$ par :

$$\mathcal{H}(n) \Leftrightarrow \left(\text{il existe deux réels } a_n \text{ et } b_n \text{ tels que } u^n = a_n u + b_n\, Id_E \right).$$

Initialisation

$u^0 = Id_E = 0 . u + 1 . Id_E$, d'où $\mathcal{H}(0)$.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{H}(n)$.

Alors

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= u^n \circ u \\ &= \left(a_n u + b_n Id_E\right) \circ u \quad \text{d'après } \mathcal{H}(n) \\ &= a_n u^2 + b_n u , \end{aligned}$$

et la relation $u^2 - 3u + 2 Id_E = \Theta$ permet d'en déduire que :

$$u^{n+1} = a_n \left(3u - 2 Id_E\right) + b_n u = \left(3 a_n + b_n\right) u - 2 a_n Id_E .$$

Il existe donc deux réels $a_{n+1} = 3 a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -2 a_n$ tels que $u^{n+1} = a_{n+1} u + b_{n+1} Id_E$, d'où $\mathcal{H}(n+1)$.

On a $\mathcal{H}(0)$, et la propriété $\mathcal{H}$ est héréditaire, donc on a $\mathcal{H}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ il existe deux réels } a_n \text{ et } b_n \text{ tels que } u^n = a_n u + b_n Id_E}$.

f. D'après **e.** , pour tout $n \in \mathbb{N}$, u^n appartient à $\text{Vect}\left(u, Id_E\right)$. Tout élément de $\mathbb{R}[u]$ est combinaison linéaire des u^n, donc appartient encore à l'espace vectoriel $\text{Vect}\left(u, Id_E\right)$.

Il en résulte que $\mathbb{R}[u] \subset \text{Vect}\left(u, Id_E\right)$, puis, l'inclusion réciproque étant évidente, que $\mathbb{R}[u] = \text{Vect}\left(u, Id_E\right)$. La famille $\left(u, Id_E\right)$ est clairement libre (les matrices de ces deux applications dans la base $\mathcal{B}$ de E sont non proportionnelles), donc $\left(u, Id_E\right)$ est une base de $\mathbb{R}[u]$.

On en conclut que $\boxed{\dim\left(\mathbb{R}[u]\right) = 2}$. On a montré en **d.** que $\dim\left(C(u)\right) = 5$,

$\boxed{\text{l'égalité } C(u) = \mathbb{R}[u] \text{ n'est donc pas vérifiée}}$.

4.a. v et u commutant, on sait que v et u^i commutent également. On a donc :

$$v\left(u^i\left(t_0\right)\right) = u^i\left(v\left(t_0\right)\right) = u^i\left(\sum_{k=0}^{n-1} \rho_k\, u^k\left(t_0\right)\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \rho_k\, u^i\left(u^k\left(t_0\right)\right) \qquad \text{car } u^i \text{ est linéaire}$$

$$= \boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \rho_k\, u^k\left(u^i\left(t_0\right)\right)} \qquad \text{car } u^i \text{ et } u^k \text{ commutent.}$$

b. D'après **a.**, l'égalité $v(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \rho_k\, u^k(x)$ est vérifiée pour tous les vecteurs x de la base $\mathcal{B} = \left(t_0, u(t_0), \dots, u^{n-1}(t_0)\right)$ de E. Par linéarité, cette égalité est donc vraie pour tous les vecteurs x de E : on a bien $\boxed{v = \sum_{k=0}^{n-1} \rho_k\, u^k}$.

c. On vient de montrer que si $v \in \mathcal{C}(u)$ alors $v \in \mathbb{R}[u]$ (avec les notations précédentes, on a $v = P(u)$, avec $P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \rho_k X^k$). Ceci prouve que $\mathcal{C}(u) \subset \mathbb{R}[u]$.

Or on a prouvé en **1.b.** que $\mathbb{R}[u] \subset \mathcal{C}(u)$; on a donc bien, par double inclusion,

$\boxed{\mathcal{C}(u) = \mathbb{R}[u]}$.

d. ***i*** – Soient v, w deux éléments de $\mathbb{R}[u]$, et λ un réel.

On a $\Psi(\lambda v + w) = (\lambda v + w)(t_0) = \lambda v(t_0) + w(t_0) = \lambda \Psi(v) + \Psi(w)$, donc $\boxed{\Psi \text{ est une application linéaire}}$.

ii – Dire que Ψ est surjective, c'est dire que, pour tout x de E, il existe $v \in \mathbb{R}[u]$ tel que $x = \Psi(v)$, c'est – à – dire tel que $x = v(t_0)$. Montrons que ceci est vérifié.

Soit $x \in E$. Décomposons x dans la base $\mathcal{B} = \left(t_0, u(t_0), \dots, u^{n-1}(t_0)\right)$ de E : il existe n réels β_k, $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, tels que $x = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k\, u^k(t_0)$. Considérons alors l'endomorphisme v de E défini par $v = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k\, u^k$. Alors, de manière évidente, $v \in \mathbb{R}[u]$ (c'est bien un polynôme en u), et l'on a bien $\Psi(v) = v(t_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k\, u^k(t_0) = x$: $\boxed{\text{l'application } \Psi \text{ est surjective}}$.

iii – Montrer que Ψ revient à montrer que $\mathrm{Ker}\left(\Psi\right) = \left\{\Theta\right\}$.

Soit $v \in \mathrm{Ker}\left(\Psi\right)$, c'est-à-dire tel que $\Psi\left(v\right) = v\left(t_0\right) = 0_E$.

Alors, comme $v \in \mathbb{R}\left[u\right] = \mathcal{C}\left(u\right)$, v et u commutent, et il s'ensuit que, pour tout

$i \in [\![0, n-1]\!]$, v et u^i commutent.

On a donc : $v\left(u^i\left(t_0\right)\right) = u^i\left(v\left(t_0\right)\right) = u^i\left(0_E\right) = 0_E$.

L'image par v de tous les vecteurs de la base $\mathcal{B} = \left(t_0, u\left(t_0\right), \dots, u^{n-1}\left(t_0\right)\right)$ de E est nulle, il en résulte que v est l'endomorphisme nul. Ainsi, on a bien $\mathrm{Ker}\left(\Psi\right) = \left\{\Theta\right\}$: $\boxed{\Psi \text{ est injective}}$.

iv – D'après ***ii –*** et ***iii –***, l'application Ψ est un isomorphisme. Ses espaces de départ et d'arrivée ont donc même dimension : $\dim\left(\mathbb{R}\left[u\right]\right) = \dim\left(E\right) = n$.

Comme, d'après **c.**, $\mathcal{C}\left(u\right) = \mathbb{R}\left[u\right]$, il s'ensuit que l'on a également $\boxed{\dim\left(\mathcal{C}\left(u\right)\right) = n}$.

5. ***Caractérisation des matrices M vérifiant $\mathcal{C}\left(M\right) = \mathcal{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$***

a. On calcule aisément :

$$M\,E_{i,i} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & m_{1,i} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & m_{2,i} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & m_{i,i} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & m_{n-1,i} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & m_{n,i} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_{i,i}\,M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ m_{i,1} & \dots & \dots & m_{i,i} & \dots & \dots & m_{i,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(toutes les colonnes de $M\,E_{i,i}$ sont nulles, sauf éventuellement la $i^{\text{ème}}$; toutes les lignes de $E_{i,i}\,M$ sont nulles, sauf éventuellement la $i^{\text{ème}}$).

Ces deux matrices étant égales, on a : $\forall\ j \neq i$, $m_{i,j} = m_{j,i} = 0$. Ceci étant valable pour tout entier i compris entre 1 et n, on en déduit que $\boxed{M \text{ est une matrice diagonale}}$.

b. On sait déjà que M est diagonale. On calcule alors :

$$M\ E_{1,i} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_{2,2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & m_{i,i} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & m_{n,n} \end{pmatrix} E_{1,i} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & m_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{et } E_{1,i}\ M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & m_{i,i} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

le coefficient de $m_{1,1}$ (resp. $m_{i,i}$) étant placé sur la première ligne, $i^{\text{ème}}$ colonne. Les deux matrices étant égales, on a $m_{1,1} = m_{i,i}$, et, ceci étant vrai pour tout entier $i \in [\![2, n]\!]$ on a donc $M = m_{1,1} I_n$:

$\boxed{\text{il existe un réel } \alpha = m_{1,1} \text{ tel que } M = \alpha\, I_n}$.

c. On vient de voir que si $\mathcal{C}(M) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors nécessairement M est proportionnelle à la matrice I_n.

Réciproquement, si M est proportionnelle à I_n, elle commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\boxed{\text{Les matrices } M \text{ pour lesquelles } \mathcal{C}(M) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ sont donc les matrices } \lambda\, I_n, \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}}$.

d. Fixons une base $\mathcal{B}$ de E. Soit u un endomorphisme de E tel que $\mathcal{C}(u) = \mathcal{L}(E)$, et soit M sa matrice relativement à la base $\mathcal{B}$.

Comme u commute avec tous les endomorphismes, M commute avec toutes les matrices.

D'après **c.**, il existe donc un réel λ tel que $M = \lambda\, I_n$, et l'on a alors $u = \lambda\, Id_E$.

Réciproquement, de manière évidente, s'il existe un réel λ tel que $u = \lambda\, Id_E$, alors $\mathcal{C}(u) = \mathcal{L}(E)$.

On en conclut que $\boxed{\text{les endomorphismes vérifiant } \mathcal{C}(u) = \mathcal{L}(E) \text{ sont les endomorphismes de la forme}}$

$\boxed{u = \lambda\, Id_E, \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}}$.

Partie II

Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

1. ***Quelques généralités préliminaires***

C'est une suite de questions de cours :

a. la famille $\left(Id_E, u, u^2, \dots, u^{n^2}\right)$ est une famille de n^2+1 éléments de $\mathcal{L}(E)$, et cet espace vectoriel est de dimension n^2. Il s'ensuit que $\left(Id_E, u, u^2, \dots, u^{n^2}\right)$ n'est pas libre, il existe donc une combinaison linéaire non triviale des éléments de cette famille qui est nulle :

$$\sum_{k=0}^{n^2} a_k u^k = \Theta \text{, avec } \left(a_0, a_1, \dots, a_{n^2}\right) \neq (0, 0, \dots, 0).$$

En notant $P = \sum_{k=0}^{n^2} a_k X^k$, P est non nul, et est un polynôme annulateur de u :

$\boxed{\text{l'endomorphisme } u \text{ admet un polynôme annulateur non nul}}$.

b. Posons $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$.

Soit λ un valeur propre de u, et $x \in E$ un vecteur propre associé.

On a évidemment $Id_E(x) = x$, $u(x) = \lambda x$, puis :

$u^2(x) = u(u(x)) = u(\lambda x) = \lambda u(x) = \lambda^2 x$,

$u^3(x) = u\left(u^2(x)\right) = u\left(\lambda^2 x\right) = \lambda^2 u(x) = \lambda^3 x$ ...

bref, on montre par une récurrence évidente que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(x) = \lambda^k x$.

On a alors $(P(u))(x) = \left(\sum_{k=0}^{p} a_k u^k\right)(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k u^k(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k \lambda^k x = P(\lambda).x$; Il découle de l'égalité $P(u) = \Theta$ que $0_E = (P(u))(x) = P(\lambda).x$, et, comme x est non nul (c'est un vecteur propre), il en résulte que $P(\lambda) = 0$: $\boxed{\text{toute valeur propre de } u \text{ est racine de } P}$.

c. Le sous – espace propre $E_\lambda(u)$ de u pour la valeur propre λ est de dimension 1, et x est un vecteur non nul de cet espace ; la famille (x) est donc une base de $E_\lambda(u)$, et il s'ensuit que pour tout $y \in E_\lambda(u)$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $y = a.x$.

Posons $y = v(u)$. On a $u(y) = u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x) = \lambda y$, donc $y \in E_\lambda(u)$, et, d'après ce qui précède, il existe alors $a \in \mathbb{R}$ tel que $y = a.x$.

Autrement dit, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $v(x) = a.x$. Comme x est non nul, ceci revient à dire que $\boxed{x \text{ est un vecteur propre de } v}$, pour une certaine valeur propre a.

d. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propriétés prouvées **a.**, **b.**, et **c.** s'étendent à M de la manière suivante :

i – La matrice M admet un polynôme annulateur non nul.

ii – Si P est un polynôme annulateur de M et λ une valeur propre de M, alors $P(\lambda) = 0$.

iii – Si M admet une valeur propre λ telle que l'espace propre associé soit de dimension 1, et si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est vecteur propre de M pour cette valeur propre, alors X est encore vecteur propre de toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commutant avec M.

Démontrons maintenant ces propriétés. Pour cela, considérons l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice, dans la base canonique de cet espace, est M.

Alors, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, l'endomorphisme $P(u)$ admet pour matrice dans la base canonique la matrice $P(M)$; on a donc $P(u) = \Theta$ si et seulement si $P(M) = 0_{n,n}$.

On en conclut que :

i – L'endomorphisme u admettant un polynôme annulateur non nul, il en est de même pour la matrice M.

ii – Si P est un polynôme annulateur de M et λ une valeur propre de M, P est également annulateur de u, et λ valeur propre de cet endomorphisme. On a donc, d'après **b.**, $\boxed{P(\lambda) = 0}$.

iii – Soit N une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commutant avec M, et soit v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à N. Notons également x le vecteur de $\mathbb{R}^n$ admettant X pour matrice de coordonnées dans la base canonique. Comme M et N commutent, u et v commutent également, et il résulte alors de **c.** que x est vecteur propre de v. ceci revient à dire que $\boxed{X \text{ est vecteur propre de } N}$.

2. *Cas des endomorphismes de E admettant n valeurs propres distinctes*

a. Soit P un polynôme annulateur non nul de M.

Toutes les valeurs propres de M sont racines de P, donc ce polynôme admet au moins n racines distinctes. Comme $P \neq 0$, ceci suffit à assurer que $\boxed{\deg(P) \geq n}$.

b. On considère une combinaison linéaire nulle des matrices de la famille $(I_n, M, M^2, \ldots, M^{n-1})$:

$\sum_{k=0}^{n-1} a_k M^k = 0_{n,n}$. Le polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ est alors un polynôme annulateur de M de degré inférieur à $n - 1$; d'après la question précédente, ce ne peut être que le polynôme nul.

Les coefficients de P sont donc tous nuls : $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$.

On a ainsi prouvé que la famille $\left(I_n , M , M^2 , \ldots , M^{n-1} \right)$ est une famille libre.

$C(M)$ admet donc une famille libre de n éléments, et par suite $\boxed{\dim\left(C(M) \right) \geq n}$.

c. Supposons qu'une matrice A commute avec M.

Le coefficient de la ligne i et de la colonne j de $AM = MA$ donne : $\lambda_j a_{i,j} = \lambda_i a_{i,j}$.

On en déduit que si $i \neq j$, alors $a_{i,j} = 0$: la matrice A est diagonale.

On vient de prouver que $C(M)$ est contenu dans l'ensemble des matrices diagonales, qui est un sous – espace de dimension n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; on a alors $\dim\left(C(M) \right) \leq n$.

Ceci, joint à l'inégalité prouvée en **b.**, permet de conclure que $\boxed{\dim\left(C(M) \right) = n}$.

d. Avec les notations de l'énoncé, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = M$, donc :

$$u \circ v = v \circ u \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) \in C(M),$$

et **c.** permet d'en conclure que $\boxed{u \circ v = v \circ u \text{ si et seulement si } \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) \text{ est diagonale}}$.

3. ***Cas général***

a. Soit $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$; montrons que $\mathrm{Ker}\left(u - \lambda_k Id_E \right)$ est stable par v.

Pour tout $x \in \mathrm{Ker}\left(u - \lambda_k Id_E \right)$:

$$\begin{aligned} \left(u - \lambda_k Id_E \right)\left(v(x) \right) &= v\left(\left(u - \lambda_k Id_E \right)(x) \right) \text{ car } u \text{ et } v \text{ commutent} \\ &= v\left(0_E \right) \text{ car } x \in \mathrm{Ker}\left(u - \lambda_k Id_E \right) \\ &= 0_E \text{ par linéarité,} \end{aligned}$$

donc $v(x) \in \mathrm{Ker}\left(u - \lambda_k Id_E \right)$: $\boxed{\mathrm{Ker}\left(u - \lambda_k Id_E \right) \text{ est bien stable par } v}$.

b. Pour tout vecteur e_i^k de la base $\mathcal{B}$, on a d'une part $(w \circ u)\left(e_i^k \right) = w\left(\lambda_k e_i^k \right) = \lambda_k w\left(e_i^k \right)$, et d'autre part, comme par stabilité $w\left(e_i^k \right) \in \mathrm{Ker}\left(u - \lambda_k Id_E \right)$:

$$(u \circ v)\left(e_i^k \right) = u\left(w\left(e_i^k \right) \right) = \lambda_k w\left(e_i^k \right).$$

Les endomorphismes $w \circ u$ et $u \circ w$ coïncident donc sur la base $\mathcal{B}$ de E, et par suite ils sont égaux : $u \circ w = w \circ u$, ce qui signifie que $\boxed{w \in \mathcal{C}(u)}$.

c. D'après ce qui précède, $v \in \mathcal{C}(u)$ si et seulement si pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $\mathrm{Ker}\left(u - \lambda_k \, Id_E\right)$ est stable par v, donc si et seulement si, pour tout vecteur e_i^k de la base $\mathcal{B}$, $v\left(e_i^k\right) \in \mathrm{Ker}\left(u - \lambda_k \, Id_E\right)$. Comme $\left(e_1^k, \dots, e_{n_k}^k\right)$, cela revient à dire que $v\left(e_i^k\right)$ est combinaison linéaire de $e_1^k, \dots, e_{n_k}^k$: sa composante suivant e_i^l est nulle dès que $l \neq k$.

En écrivant la représentation matricielle habituelle, on se convaincra qu'alors $v \in \mathcal{C}(u)$ si et seulement

$$\text{si } \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) \text{ est de la forme } \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1^1 \dots e_1^{n_1} \dots\dots & \qquad e_k^1 \dots\dots\dots e_k^{n_k} & \dots & e_p^1 \dots e_p^{n_p} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} V_1 & \dots & 0 & 0_{n_1, n_k} & 0 & \dots & 0_{n_1, n_p} \\ 0_{n_2, n_1} & V_2 & 0 & 0_{n_2, n_k} & 0 & \dots & 0_{n_2, n_p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0_{n_k, n_1} & \dots & 0 & \underbrace{\begin{pmatrix} * & \dots & \dots & * \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ * & & \ddots & * \\ * & \dots & \dots & * \end{pmatrix}}_{= V_k} & 0 & \dots & 0_{n_k, n_p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0_{n_{p-1}, n_1} & \dots & 0 & 0_{n_{p-1}, n_k} & \ddots & \dots & 0_{n_{p-1}, n_k} \\ 0_{n_p, n_1} & \dots & 0 & 0_{n_p, n_k} & 0 & \dots & m_{n,n} \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} e_k^1 \\ \vdots \\ \vdots \\ e_k^{n_k} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix}$$

d. Chaque bloc V_k est un élément quelconque de l'espace $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ qui est de dimension n_k^2.

Définir une matrice de la forme précédente revient à se donner chacun des blocs V_k,

donc $\dim\left(\mathcal{C}(u)\right) = \sum_{k=1}^{p} n_k^2$. (*on pourrait démontrer ceci rigoureusement, mais ce ne serait pas très drôle à écrire).*

e. Puisque u est diagonalisable de valeurs propres λ_k :

$$n = \dim(E) = \sum_{k=1}^{p} \dim\left(\mathrm{Ker}\left(u - \lambda_k \, Id_E\right)\right) = \sum_{k=1}^{p} n_k .$$

Pour chaque entier k, $n_k^2 \geq n_k$, on a donc $\boxed{n = \sum_{k=1}^{p} n_k \leq \sum_{k=1}^{p} n_k^2 = \dim\left(\mathcal{C}(u)\right)}$.

En outre, il y a égalité si et seulement si, pour tout k, $n_k^2 = n_k$. Comme $n_k \neq 0$ (λ_k est bien valeur propre de u, le sous – espace propre associé est de dimension non nulle), ceci équivaut à $n_k = 1$: ainsi, $\dim\left(C(u)\right) = n$ si et seulement si toutes les valeurs propres de u sont simples, donc si et seulement si $\boxed{u \text{ possède } n \text{ valeurs propres distinctes}}$.

Partie III

Cas d'un endomorphisme nilpotent d'ordre 2

1.a. X^2 est un polynôme annulateur de u, donc, d'après **II.1.b.**, toute valeur propre de u est racine de ce polynôme : la seule valeur propre possible de u est 0.

Réciproquement, $u \circ u = \Theta$ qui est non injectif, donc u est non injectif (la composée de deux applications injectives reste injective), ainsi 0 est bien valeur propre de u.

On a donc $\operatorname{Spec}(u) = \{0\}$.

b. • Soit $x \in \operatorname{Im}(u)$. Alors, par définition, il existe un élément t de E tel que $x = u(t)$, et l'on a alors $u(x) = u^2(t) = 0_E$. Ainsi, $x \in \operatorname{Ker}(u)$, et l'on a donc bien $\boxed{\operatorname{Im}(u) \subset \operatorname{Ker}(u)}$.

• • D'après le théorème du rang, on a $\dim\left(\operatorname{Im}(u)\right) + \dim\left(\operatorname{Ker}(u)\right) = \dim(E) = n$.

Or, de l'inclusion précédente, on en déduit que $r = \dim\left(\operatorname{Im}(u)\right) \leq \dim\left(\operatorname{Ker}(u)\right)$. En minorant $\dim\left(\operatorname{Ker}(u)\right)$ par r dans l'égalité précédente, on obtient bien $\boxed{2r \geq n}$.

2. ***Étude de l'endomorphisme*** u

a. De manière évidente, $\left(u(e_1),\dots,u(e_r)\right)$ est une famille d'éléments de $\operatorname{Im}(u)$ de cardinal $r = \dim\left(\operatorname{Im}(u)\right)$; c'est donc une base de $\operatorname{Im}(u)$ si et seulement si c'est une famille libre.

Considérons alors une combinaison linéaire nulle $\alpha_1 u(e_1) + \dots + \alpha_r u(e_r) = 0_E$.

Alors, par linéarité de u, on a $u\left(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r\right) = 0_E$, c'est – à – dire que $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r \in \operatorname{Ker}(u)$.

Or, $\left(e_1,\dots,e_r\right)$ est une base de H, donc $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r \in H$ et par conséquent :

$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r \in H \cap \operatorname{Ker}(u) = \left\{0_E\right\}$ (en effet, H et $\operatorname{Ker}(u)$ sont en somme directe, et donc leur intersection est réduite à $\{0_E\}$).

Bref, on a donc $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_r e_r = 0_E$. Mais comme $(e_1, \ldots, e_r)$ est une famille libre (c'est une base de H), on peut en conclure que $\alpha_1 = \ldots = \alpha_r = 0$:

La famille $(u(e_1), \ldots, u(e_r))$ est libre, et par suite $\boxed{(u(e_1), \ldots, u(e_r)) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(u)}$.

b. $(e_1, \ldots, e_r)$ est une base de H, et $(u(e_1), \ldots, u(e_r), t_1, \ldots, t_{n-2r})$ une base de $\mathrm{Ker}(u)$.

Comme H et $\mathrm{Ker}(u)$ sont supplémentaires dans E, la famille :

$$\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_r, u(e_1), \ldots, u(e_r), t_1, \ldots, t_{n-2r}),$$

obtenue par concaténation d'une base de chacun de ces deux sous – espaces, $\boxed{\text{est une base de } E}$.

c. Pour $1 \le k \le r$, l'image par u du k ième vecteur de la base $\mathcal{B}$ est égale au $(r+k)$ ième vecteur de la base $\mathcal{B}$. Donc, la k ième colonne de U ne comporte que des 0, sauf sur la $(r+k)$ ième ligne où le coefficient est 1. Écrites par blocs, les r premières colonnes de la matrice U sont

$$\begin{array}{cl} \xleftrightarrow{\;r\;} & \\ 0_{r,r} & \updownarrow r \\ I_r & \updownarrow r \\ 0_{n-2r,r} & \updownarrow n-2r \end{array}.$$

Comme $u^2 = \Theta$, on a $u(u(e_i)) = 0_E$ pour $1 \le i \le r$, les colonnes de U numérotées de $r+1$ à $2r$ sont donc nulles.

Enfin, pour $1 \le k \le n-2r$, on a $t_k \in \mathrm{Ker}(u)$ donc $u(t_k) = 0_E$. Les colonnes de U numérotées de $2r+1$ à n sont donc nulles également.

Lorsqu'on écrit par bloc la matrice que l'on a obtenue, on obtient bien :

$$\boxed{\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \xleftrightarrow{\;r\;} & \xleftrightarrow{\;r\;} & \xleftrightarrow{\;n-2r\;} \end{array} \\ U = \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_{r,r} & 0_{r,n-2r} \\ I_r & 0_{r,r} & 0_{r,n-2r} \\ 0_{n-2r,r} & 0_{n-2r,r} & 0_{n-2r,n-2r} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow r \\ \updownarrow r \\ \updownarrow n-2r \end{array} \end{array}}.$$

d. ***Détermination de*** $C(u)$

i – u et v commutent si et seulement si leurs matrices dans la base B commutent, c'est – à – dire si et seulement si $UV = VU$. Les produits par blocs donnent :

$$U\,V = \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_{r,r} & 0_{r,n-2r} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ 0_{n-2r,r} & 0_{n-2r,r} & 0_{n-2r,n-2r} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V\,U = \begin{pmatrix} A_2 & 0_{r,r} & 0_{r,n-2r} \\ A_5 & 0_{r,r} & 0_{r,n-2r} \\ A_8 & 0_{n-2r,r} & 0_{n-2r,n-2r} \end{pmatrix}$$

Les deux matrices commutent si et seulement si elles sont égales par blocs, c'est à dire si et seulement

$$\text{si :} \boxed{\begin{cases} A_2 = 0_{r,r} \\ A_3 = 0_{r,n-2r} \\ A_8 = 0_{n-2r,r} \\ A_1 = A_5 \end{cases}} \; .$$

ii – v commute avec u si et seulement si sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \overset{r}{\longleftrightarrow} & \overset{r}{\longleftrightarrow} & \overset{n-2r}{\longleftrightarrow} \end{array} & \\ V = \begin{pmatrix} A_1 & 0_{r,r} & 0_{r,n-2r} \\ A_4 & A_1 & A_6 \\ A_7 & 0_{n-2r,r} & A_9 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \updownarrow r \\ \updownarrow r \\ \updownarrow n-2r \end{array} \end{array} ,$$

les matrices A_1, A_4, A_6, A_7 et A_9 étant quelconques dans leurs ensembles de matrices respectifs.

Il y a r^2 coefficients pour A_1, r^2 coefficients pour A_4, $r\left(n - 2r\right)$ coefficients pour A_6, $\left(n - 2r\right)r$ coefficients pour A_7 et $\left(n - 2r\right)^2$ coefficients pour A_9. On a donc :

$$\dim\left(\mathcal{C}\left(u\right)\right) = r^2 + r^2 + r\left(n - 2r\right) + \left(n - 2r\right)r + \left(n - 2r\right)^2 = n^2 - 2rn + 2r^2 \; .$$

Pour être plus rigoureux, on aurait pu prouver que l'application :

$$\Psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_r(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_r(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{r,n-2r}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n-2r,r}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n-2r}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}\left(u\right) \\ \left(A_1, A_4, A_6, A_7, A_9\right) & \mapsto & \begin{pmatrix} A_1 & 0_{r,r} & 0_{r,n-2r} \\ A_4 & A_1 & A_6 \\ A_7 & 0_{n-2r,r} & A_9 \end{pmatrix} \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

iii – Une brève étude prouve que l'application $r \mapsto n^2 - 2rn + 2r^2$ atteint sa valeur minimum pour $r = \dfrac{1}{2}n$, ce minimum valant $\dfrac{1}{2}n^2$.

Ainsi, $\boxed{\dim\left(\mathcal{C}\left(u\right)\right) \geq \dfrac{1}{2}n^2 \text{, et l'égalité a lieu si et seulement si } r = \dfrac{1}{2}n}$.

Partie IV

Commutant d'un endomorphisme vérifiant une relation polynomiale de degré 3

1. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f - 2\,Id_E)$, alors $\mathrm{Ker}(f - 2\,Id_E)(x) = 0_E$.

Par composition, on a donc :

$(f - 2\,Id_E)^2(x) = (f - 2\,Id_E)\big((f - 2\,Id_E)(x)\big) = (f - 2\,Id_E)(0_E) = 0_E$,

d'où : $x \in \mathrm{Ker}\big((f - 2\,Id_E)^2\big)$: On a bien $\boxed{\mathrm{Ker}(f - 2\,Id_E) \subset \mathrm{Ker}(f - 2\,Id_E)^2}$.

Cette inclusion est stricte. En effet, puisque $(f - Id_E) \circ (f - 2\,Id_E) \neq \Theta$, il existe un vecteur x_0 élément de E tel que :

$$(f - Id_E) \circ (f - 2\,Id_E)(x_0) = (f - 2\,Id_E) \circ (f - Id_E)(x_0) \neq 0_E \ .$$

Posons $w_0 = (f - Id_E)(x_0)$. Alors, $w_0 \notin \mathrm{Ker}(f - 2\,Id_E)$, puisque $(f - 2\,Id_E)(w_0) \neq 0_E$.

Mais $\big((f - 2\,Id_E)^2\big)(w_0) = \big((f - 2\,Id_E)^2 \circ (f - Id_E)\big)(x_0) = 0_E$, puisque $(f - Id_E) \circ (f - Id_E)^2 = \Theta$. Par conséquent, $w_0 \in \mathrm{Ker}\big((f - 2\,Id_E)^2\big)$.

Ceci prouve que l'inclusion $\mathrm{Ker}(f - 2\,Id_E) \subset \mathrm{Ker}(f - 2\,Id_E)^2$ est stricte.

2.a. $\big(X - 1, X(X - 1), (X - 2)^2\big)$ est une famille de cardinal 3, et $\dim\big(\mathbb{R}_2[X]\big) = 3$. Cette famille est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ si et seulement si elle est libre.

Considérons une combinaison linéaire nulle $a(X - 1) + b\,X(X - 1) + c(X - 2)^2 = \Theta$.

On évalue cette fonction nulle en des valeurs particulières :

Pour $X = 1$, on obtient $c = 0$. Ensuite, pour $X = 0$, on obtient $-a = 0$, soit $a = 0$, et enfin $b = 0$ avec $X = 2$ par exemple.

Bref, $\big(X - 1, X(X - 1), (X - 2)^2\big)$ est libre, et par suite c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Euh, pour la suite... il était une heure du matin, j'avais encore vos rapports de Tipe à lire... stop.