PC - Lakanal

2024- 2025

Programme de colles s11 (déterminants, algèbre linéaire)

Du 25 – 11 au 29 – 11

Calculs de déterminants

Révisions de première année essentiellement. Points nouveaux :

1. Les déterminants de Vandermonde (démonstration à connaître).

2. Les déterminants triangulaires par blocs (idem).

3. Polynôme caractéristique : définition, premières propriétés (degré, coefficients de degré 0, 1, $n-1$, cas de matrices triangulaires ; polynôme caractéristique d'une transposée, de matrices semblables).

Algèbre linéaire

Révisions de première année essentiellement. Points nouveaux :

1. Espace vectoriel produit : définition. En dimension finie, dimension d'un espace produit.

2. Sommes, sommes directes de n sous espaces vectoriels. $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est le plus petit sous – ev de E contenant chacun des E_i.

Toute famille obtenue par concaténation d'une famille génératrice de chacun des E_i est une famille génératrice de $\sum_{i=1}^{n} E_i$.

Caractérisation des sommes directes :

- La somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe ssi une famille obtenue par concaténation d'une base de chacun des E_i est une base de la somme. On peut remplacer « une » par « toute ». Base adaptée à une décomposition en somme directe.
- La somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe si et seulement si : $\forall\left(x_1,\dots,x_n\right)\in\prod_{i=1}^{n} E_i,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow x_1=\dots=x_n=0$.
- Lorsque les E_i sont de dimension finie : $\dim\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right)\le\sum_{i=1}^{n}\dim\left(E_i\right)$, et les E_i sont en somme directe si et seulement si $\dim\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\dim\left(E_i\right)$.

On rappelle que, pour $n>2$, le fait que l'intersection des E_i soit réduite à $\{0\}$, ou que les intersections deux à deux soient réduites à $\{0\}$, ne prouve pas que la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe.

3. Sous –espaces stables Endomorphismes induits. Trigonalisation par blocs. Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit divise celui de l'endomorphisme de départ.

La semaine d'après

Algèbre linéaire, début de la réduction