PC - Lakanal

2024- 2025

Programme de colles s12 (algèbre linéaire)

Du 02 – 12 au 06 – 12

Toute l'algèbre linéaire de première année est au programme de colle.

Compléments d'algèbre linéaire

1. Espace vectoriel produit : définition. En dimension finie, dimension d'un espace produit.

2. Sommes, sommes directes de n sous espaces vectoriels. $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est le plus petit sous – ev de E contenant chacun des E_i.

Toute famille obtenue par concaténation d'une famille génératrice de chacun des E_i est une famille génératrice de $\sum_{i=1}^{n} E_i$.

Caractérisation des sommes directes :

- La somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe ssi une famille obtenue par concaténation d'une base de chacun des E_i est une base de la somme. On peut remplacer « une » par « toute ». Base adaptée à une décomposition en somme directe.
- La somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe si et seulement si : $\forall \left(x_1,\dots,x_n\right) \in \prod_{i=1}^{n} E_i$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow x_1 = \dots = x_n = 0$.
- Lorsque les E_i sont de dimension finie : $\dim\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \dim\left(E_i\right)$, et les E_i sont en somme directe si et seulement si $\dim\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim\left(E_i\right)$.

On rappelle que, pour $n > 2$, le fait que l'intersection des E_i soit réduite à $\{0\}$, ou que les intersections deux à deux soient réduites à $\{0\}$, ne prouve pas que la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe.

2. Sous –espaces stables. Si u et v commutent, le noyau et l'image de u sont stables par v. Endomorphismes induits. Trigonalisation par blocs. Calcul par blocs d'un produit matriciel.

3. Interpolation de Lagrange. Existence, expression. Bases de Lagrange de $\mathbb{K}_n[X]$. Expression d'un polynôme dans une base de Lagrange ; cas particulier du polynôme constant égal à 1. Lien avec les matrices de Vandermonde.

4. Polynômes d'endomorphismes ou de matrices carrées

a. Polynômes d'endomorphismes ou de matrices carrées

b. Polynômes annulateurs

Définition. Toute matrice carrée, tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, possède un polynôme annulateur (non nul). Premières applications en exercices :

au calcul des puissances n – ièmes d'une racine carrée, ou aux itérées d'un endomorphisme ;

lorsque $P(0) \neq 0$, à la détermination de l'inverse.

Réduction

Les toutes premières notions :

I ÉLÉMENTS PROPRES D'UN ENDOMORPHISME OU D'UNE MATRICE CARRÉE

1. **Définitions :**

   Valeurs propres, vecteurs propres, sous – espaces propres, spectre, éléments propres.

2. **Premières propriétés**
3. **En dimension finie, liens entre éléments propres d'un endomorphisme et ceux de sa matrice relativement à une base.**

La semaine d'après

Algèbre linéaire, réduction (suite).