PC - Lakanal

2024- 2025

Programme de colles s13 (algèbre linéaire, réduction)

Du 09 – 12 au 13 – 12

L'algèbre linéaire de première année est toujours au programme de colle.

Compléments d'algèbre linéaire

1. Espace vectoriel produit : définition. En dimension finie, dimension d'un espace produit.

2. Sommes, sommes directes de n sous espaces vectoriels. $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est le plus petit sous – ev de E contenant chacun des E_i.

   Toute famille obtenue par concaténation d'une famille génératrice de chacun des E_i est une famille génératrice de $\sum_{i=1}^{n} E_i$.

   Caractérisation des sommes directes :

   - La somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe ssi une famille obtenue par concaténation d'une base de chacun des E_i est une base de la somme. On peut remplacer « une » par « toute ». Base adaptée à une décomposition en somme directe.
   - La somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe si et seulement si : $\forall \left(x_1, \ldots, x_n \right) \in \prod_{i=1}^{n} E_i$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow x_1 = \ldots = x_n = 0$.
   - Lorsque les E_i sont de dimension finie : $\dim\left(\sum_{i=1}^{n} E_i \right) \leq \sum_{i=1}^{n} \dim\left(E_i \right)$, et les E_i sont en somme directe si et seulement si $\dim\left(\sum_{i=1}^{n} E_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \dim\left(E_i \right)$.

   On rappelle que, pour $n > 2$, le fait que l'intersection des E_i soit réduite à $\{0\}$, ou que les intersections deux à deux soient réduites à $\{0\}$, ne prouve pas que la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe.

2. Sous –espaces stables. Si u et v commutent, le noyau et l'image de u sont stables par v. Endomorphismes induits. Trigonalisation par blocs. Calcul par blocs d'un produit matriciel.

3. Interpolation de Lagrange. Existence, expression. Bases de Lagrange de $\mathbb{K}_n[X]$. Expression d'un polynôme dans une base de Lagrange ; cas particulier du polynôme constant égal à 1. Lien avec les matrices de Vandermonde.

4. Polynômes d'endomorphismes ou de matrices carrées
   a. **Polynômes d'endomorphismes ou de matrices carrées**
   b. **Polynômes annulateurs**

      Définition. Toute matrice carrée, tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, possède un polynôme annulateur (non nul). Premières applications en exercices :

      au calcul des puissances n – ièmes d'une racine carrée, ou aux itérées d'un endomorphisme ;

      lorsque $P(0) \neq 0$, à la détermination de l'inverse.

Réduction

Chapitre encore incomplet :

I ÉLÉMENTS PROPRES D'UN ENDOMORPHISME OU D'UNE MATRICE CARRÉE

1. Définitions

2. Premières propriétés

3. En dimension finie, liens entre éléments propres d'un endomorphisme et ceux de sa matrice relativement à une base.

II DIAGONALISATION

1. Diagonalisablité

Définition d'une matrice diagonalisable, d'un endomorphisme diagonalisable (en dimension finie).

Un endomorphisme f est diagonalisable ssi il existe une base de l'espace formée de vecteurs propres de f ; traduction matricielle de ce résultat.

2. Théorème fondamental

Les sous – espaces propres sont en somme directe.

3. Corollaires

- Toute famille obtenue par concaténation de bases (de familles libres) de sous – espaces propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes, est libre.
- En dimension finie n, un endomorphisme admet au plus n valeurs propres, et la somme des dimensions des sous – espaces propres est inférieure ou égale à n.
- En dimension finie, l'endomorphisme f de E est diagonalisable ssi $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}(f)} E_\lambda(f) = E$, ou encore ssi $\sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(f)} \dim\left(E_\lambda(f)\right) = \dim(E)$.

  Cas particuliers : En dimension n, tout endomorphisme ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable, et ses sous – espaces propres sont de dimension 1. Un endomorphisme ayant une unique valeur propre distinctes n'est pas diagonalisable, sauf si c'est une homothétie.

Traductions matricielles.

4. Quelques aspects matriciels

Valeurs propres d'une matrice triangulaire

5. Éléments propres d'endomorphismes particuliers

Homothéties, projecteurs, symétries, endomorphismes nilpotents.

III POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE

1. Définition (rappel)

Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme en dimension finie.

Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme est égal à celui de sa matrice relativement à toute base de l'espace.

Conséquence : deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique (réciproque fausse).

2. Spectre, et racines du polynôms caractéristique

Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique.

Définition de l'ordre de multiplicité d'une valeur propre. La dimension d'un sous – espace propre est inférieure ou égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante. Cas des valeurs propres simples.

3. Quelques propriétés du polynôme caractéristique (rappels)

En dimension n : degré, coefficients de degré 0, n et $n-1$. Exemples en petites dimensions

4. Polynômes caractéristiques scindés

Cas d'un polynôme caractéristique scindé à racines simples.

Un endomorphisme en dimension finie est diagonalisable ssi son polynôme caractéristique est scindé, et la dimension de tout sous – espace propre est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante.

IV POLYNÔMES D'ENDOMORPHISMES OU DE MATRICES CARRÉES

1. **Polynômes d'endomorphismes ou de matrices carrées**
2. **Polynômes annulateurs**

Définition. Toute matrice carrée, tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, possède un polynôme annulateur (non nul).

Si P est un polynôme annulateur de u, toute valeur propre de u est racine de P (réciproque fausse).

Critère de l'annulateur scindé à racines simples.

La semaine d'après

Réduction (au complet).