Lycée Lakanal

2024- 2025

PC

Espaces probabilisés

I Espaces probabilisables

Définition

Soit Ω un ensemble, appelé ***univers*** .

On appelle ***tribu*** ou ***σ – algèbre*** de parties de Ω tout sous – ensemble $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ tel que :

i_ $\Omega \in \mathcal{T}$.

ii_ $\forall\ A \in \mathcal{T}\ ,\ \overline{A} \in \mathcal{T}$ (*autrement dit,* $\mathcal{T}$ *est stable par complémentation*)

iii_ Pour tout ensemble I fini ou dénombrable, $\forall\ \left(A_i\right)_{i \in I} \in \mathcal{T}^I\ ,\ \bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.

(*autrement dit,* $\mathcal{T}$ *est stable par réunion* ***fini ou dénombrable***).

Vocabulaire

Lorsque $\mathcal{T}$ est une tribu de parties de Ω :

- Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés les ***événements*** .
- • • $(\Omega, \mathcal{T})$ est appelé ***univers probabilisable*** .

Proposition

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. Alors,

i_ $\varnothing \in \mathcal{T}$.

ii_ $\forall\ (A, B) \in \mathcal{T}^2,\ A \bigcup B\ ,\ A \bigcap B\ ,\ A \setminus B\ ,\ A\ \Delta\ B$ appartiennent à $\mathcal{T}$.

iii_ Pour tout ensemble I **fini ou dénombrable** : $\forall\ \left(A_i\right)_{i \in I} \in \mathcal{T}^I$,

$$\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T} \quad \text{et} \quad \bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}\ .$$

II Espaces probabilisés

1_ *Définition d'une probabilité sur un ensemble fini*

(***Rappel de première année***)

Définitions

Soit Ω un ensemble fini, appelé ***univers*** . Alors :

i_ $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ s'appelle ***espace ou univers probabilisable*** .

ii_ $X \in \mathcal{P}(\Omega)$ s'appelle un ***événement*** .

iii_ $\{\omega\} \in \mathcal{P}(\Omega)$ s'appelle un ***événement élémentaire*** .

Définition

Soit $\left(\Omega, \mathcal{P} \left(\Omega \right) \right)$ un univers probabilisable ***fini*** .

On appelle ***probabilité*** définie sur $\left(\Omega, \mathcal{P} \left(\Omega \right) \right)$ toute application

$$\mathbb{P} \ : \ \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{P} \left(\Omega \right) & \rightarrow & \left[0 , 1 \right] \\ X & \mapsto & \mathbb{P} \left(X \right) \end{array} \right. \text{ vérifiant :}$$

i_ $\mathbb{P}\left(\Omega \right) = 1$,

ii_ $\forall \ \left(A, B \right) \in \mathcal{P} \left(\Omega \right)^2, \ A \bigcap B = \varnothing \ \Rightarrow \ \mathbb{P}\left(A \bigcup B \right) = \mathbb{P}\left(A \right) + \mathbb{P}\left(B \right)$.

Cette propriété s'appelle l' ***additivité (forte)*** de la probabilité $\mathbb{P}$.

$\left(\Omega, \mathcal{P} \left(\Omega \right), \mathbb{P} \right)$ s'appelle alors ***espace ou univers probabilisé fini*** .

2_ ***Probabilité sur un univers quelconque***

Définitions

Soit $\left(\Omega, \mathcal{T} \right)$ un espace probabilisable. On appelle ***probabilité*** définie sur $\left(\Omega, \mathcal{T} \right)$ toute application

$$\mathbb{P} \ : \ \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \rightarrow & \left[0 , 1 \right] \\ X & \mapsto & \mathbb{P} \left(X \right) \end{array} \right. \text{ vérifiant :}$$

i_ $\mathbb{P} \left(\Omega \right) = 1$,

ii_ $\forall \ \left(A_n \right)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$, ***<u>deux à deux incompatibles</u>*** ,

- $\sum\limits_{n \geq 0} \mathbb{P} \left(A_n \right)$ converge, et :

•• $$\mathbb{P} \left(\bigcup_{n = 0}^{+\infty} A_n \right) = \sum_{n = 0}^{+\infty} \mathbb{P} \left(A_n \right) .$$

Cette seconde propriété s'appelle la ***σ – additivité*** de la probabilité $\mathbb{P}$.

$\left(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P} \right)$ s'appelle alors ***espace ou univers probabilisé***.

Définitions vocabulairiques

Soit $\left(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P} \right)$ un espace probabilisé.

• Soit $A \in \mathcal{T}$. Si $\mathbb{P} \left(A \right) = 0$, A est dit ***négligeable*** ou *quasi – impossible* .

•• Soit $A \in \mathcal{T}$. Si $\mathbb{P} \left(A \right) = 1$, A est dit ***quasi – certain*** ou *presque sûr*.

••• Soit $\mathcal{P}$ une proposition logique, et $A = \left\{ \omega \in \Omega \ / \ \omega \text{ vérifie la propriété } \mathcal{P} \right\}$.

Si $\mathbb{P} \left(A \right) = 1$, on dit que $\mathcal{P}$ est *vraie* ***presque sûrement (p.s.)*** , ou ***presque partout (p.p.)*** .

3_ ***Propriétés d'une probabilité***

Théorème

Soit $\left(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P} \right)$ un univers probabilisé.

Soit $\left(A, B \right) \in \mathcal{T}^2$ deux événements, et $\left(A_i \right)_{i \in [1, n]}$ une famille d'événements.

0_ $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

1_ Si A et B sont ***incompatibles*** (disjoints) , $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

2_ Si les $(A_i)_{i \in [1,n]}$ sont deux à deux incompatibles, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$.

3_ $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

4_ $\underline{\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)}$.

En particulier, si $B \subset A$, $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$.

5_ La probabilité $\mathbb{P}$ est ***isotone*** (croissante pour l'inclusion), *i.e.* $B \subset A \Rightarrow \mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A)$.

6_ ***Analogue de la formule des quatre cardinaux***

$$\underline{\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)} \ .$$

7_ ***Formule du crible de Poincaré***

$$\underline{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{\ell=1}^{k} A_{i_\ell}\right)\right)} \ .$$

4_ *Caractérisation d'une probabilité sur un univers fini ou dénombrable*

a_ Sur un univers fini

Théorème

Soit Ω un univers fini, $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, et $(p_1, \dots, p_n)$ n réels.

Alors il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que $\forall\ i \in [1, n]$, $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$

si et seulement si $\left\{ \begin{array}{ll} \bullet & \forall\ i \in [1,n],\ 0 \leq p_i\ (\leq 1) \\ \bullet\bullet & \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \end{array} \right.$.

La probabilité $\mathbb{P}$ est alors unique, et pour tout événement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a : $\underline{\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in [1,n]\ /\ \omega_i \in A} p_i}$.

b_ Sur un univers dénombrable

Théorème

Soit Ω un univers **dénombrable** , $\Omega = \{\omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, et $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de réels

tels que $\left\{ \begin{array}{ll} \bullet & \forall\ k \in \mathbb{N},\ 0 \leq p_k\ (\leq 1) \\ \bullet\bullet & \sum_{k \in \mathbb{N}} p_k \text{ converge et } \sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1 \end{array} \right.$. Alors :

- il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que : $\forall\ k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\{\omega_k\}) = p_k$.

•• $\underline{\forall\ A \in \mathcal{T},\ \mathbb{P}(A) = \sum_{k \in \mathbb{N}\ /\ \omega_k \in A} p_k}$.

Autrement dit, en Français : « *La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent* » …

5_ ***Equiprobabilité (probabilité uniforme) sur un univers fini***

Théorème

Soit Ω un univers fini, $\Omega = \left\{ \omega_1 , \dots , \omega_n \right\}$.

Alors il existe une unique mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $\left(\Omega, \mathcal{P}\left(\Omega \right) \right)$ telle que :

$$\forall \ i \in [1, n] \ , \ \mathbb{P}\left(\left\{ \omega_i \right\} \right) = \frac{1}{n} .$$

Cette mesure de probabilités est appelé probabilité uniforme sur Ω.

On a pour cette mesure de probabilité :

$$\forall \ A \in \mathcal{P}\left(\Omega \right), \ \mathbb{P}\left(A \right) = \frac{\# \left(A \right)}{\# \left(\Omega \right)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} .$$

6_ ***Systèmes complets et quasi – complets d'événements***

Définition

Soit $\left(\Omega, \mathcal{T} \right)$ un univers probabilisable, soit $\left(A_i \right)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{T}$, où I est un ensemble **au plus dénombrable**.

La famille $\left(A_i \right)_{i \in I}$ est appelée ***système complet d'événements*** de $\left(\Omega, \mathcal{T} \right)$ ssi c'est un ***recouvrement disjoint*** de Ω, *i.e.* ssi :

- $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$ ***(recouvrement)***
- •• $\forall \ \left(i, j \right) \in I^2 , \ i \neq j \ \Rightarrow \ A_i \bigcap A_j = \varnothing$ ***(disjoint)***

***Propriété* 1**

Soit $\left(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P} \right)$ un univers probabilisé.

- Soit $\left(A_i \right)_{i \in \ 1, n}$ un système complet fini d'évènements. Alors,

$$\sum_{i = 1}^{n} \mathbb{P}\left(A_i \right) = 1$$

- •• Soit $\left(A_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ un **système complet dénombrable d'événements** de $\mathcal{T}$. Alors,

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\left(A_i \right) \text{ converge, et } \sum_{i = 0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(A_i \right) = 1 .$$

Propriété* 2** ***(sous-additivité, ou inégalité de Boole)

Soit $\left(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P} \right)$ un univers probabilisé.

Soit $\left(A_i \right)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite quelconque d'événements de $\mathcal{T}$. Alors si $\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\left(A_i \right)$ converge :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \leq \sum_{i = 0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(A_i \right) .$$

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un univers probabilisé.

On appelle ***système quasi – complet d'événements*** de $\mathcal{T}$ toute famille finie $(A_i)_{i \in [1, n]}$, ou toute famille dénombrable $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$, formée d'évènements deux à deux quasi – incompatibles, et vérifiant $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = 1$ (dans le cas d'une famille finie), ou $\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i) = 1$ (dans le cas d'une famille infinie).

III Théorèmes de continuité pour les probabilités

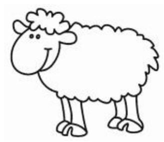
Théorème ***(de continuité croissante, ou de limite monotone dans le cas croissant)***

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un univers probabilisé. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante (au sens de l'inclusion) d'événements de $\mathcal{T}$, *i.e.* telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$. Alors,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}(A_N) .$$

Preuve

L'idée est d'appliquer la σ – additivité. L'intérêt de la démarche est de voir comment se ramener à une famille d'événements deux à deux incompatibles. Un dessin ? Ok, un dessin…



On pose donc : $B_0 = A_0$, et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$. On vérifie alors que :

- *Les événements $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux à deux incompatibles :*

  Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ tels que $i \neq j$. On veut montrer que $B_i \cap B_j = \varnothing$. Supposons un instant qu'il n'en est rien. Il existe alors un élément $\omega \in B_i \cap B_j$. On peut supposer, par exemple, que $i < j$. Comme $\omega \in B_i$, on a $\omega \in A_i$.

  Or $i < j$, *i.e.* $i \leq j - 1$. La croissance de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donne alors : $\omega \in A_{j-1}$. $(\mathbf{1})$

  Mais $\omega \in B_j = A_j \setminus A_{j-1}$. En particulier : $\omega \notin A_{j-1}$. $(\mathbf{2})$

  Regardez bien $(\mathbf{1})$ et $(\mathbf{2})$, vous constaterez que ça fait désordre…

  Par suite tout ceci est un peu légèrement contradictoire, et $B_i \cap B_j = \varnothing$.

•• $\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$. En effet :

  ◦ $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n \subset A_n$, donc $\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$.

  ◦ Soit $\omega \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$. Il existe par définition un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\omega \in A_n$. Ainsi, l'ensemble

$\mathcal{E} = \left\{ n \in \mathbb{N} \ / \ \omega \in A_n \right\}$ est non vide. Il admet donc un plus petit élément n_0, auquel cas $\omega \in A_{n_0}$, mais $\omega \notin A_{n_0 - 1}$ (avec la convention $A_{-1} = \varnothing$).

- Si $n_0 = 0$, on a $\omega \in A_{n_0} = B_{n_0}$, donc $\omega \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$.
- Si $n_0 \in \mathbb{N}^*$, on a $\omega \in A_{n_0}$ et $\omega \notin A_{n_0 - 1}$, donc $\omega \in A_{n_0} \setminus A_{n_0 - 1}$, *i.e.* encore $\omega \in B_{n_0}$. Par suite, $\omega \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$.

On a donc dans tous les cas $\omega \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$, d'où $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$.

Finalement : $\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$.

L'avantage des $\left(B_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ par rapport aux $\left(A_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$, c'est qu'ils sont deux à deux incompatibles, et que l'on peut ainsi leur appliquer la propriété de σ – additivité. On peut alors écrire : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \right) = \mathbb{P}\left(\biguplus_{n=0}^{+\infty} B_n \right)$, puis par σ – additivité, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(B_n \right)$, la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}\left(B_n \right)$ étant **assurée** automatiquement par la σ – additivité. So :

$$\underline{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \right)} = \mathbb{P}\left(A_0 \right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(A_n \setminus A_{n-1} \right)$$

$$= \mathbb{P}\left(A_0 \right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\mathbb{P}\left(A_n \right) - \mathbb{P}\left(A_{n-1} \right) \right), \qquad \text{(car } A_{n-1} \subset A_n \text{)}$$

$$= \mathbb{P}\left(A_0 \right) + \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\mathbb{P}\left(A_n \right) - \mathbb{P}\left(A_{n-1} \right) \right)$$

$$= \mathbb{P}\left(A_0 \right) + \lim_{N \to +\infty} \left(\mathbb{P}\left(A_N \right) - \mathbb{P}\left(A_0 \right) \right) = \boxed{\lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left(A_N \right)}. \qquad \square$$

Théorème ***<u>(de continuité décroissante, ou de limite monotone dans le cas décroissant)</u>***

Soit $\left(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P} \right)$ un univers probabilisé. Soit $\left(A_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante (au sens de l'inclusion) d'événements de $\mathcal{T}$, *i.e.* telle que : $\forall \ n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$. Alors,

$$\underline{\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \right) = \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left(A_N \right)}.$$

<u>Preuve</u>

On écrit tout d'abord que : $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \right) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n} \right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n} \right)$ $(\mathbf{1})$.

Or, puisque $\left(A_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante pour l'inclusion d'événements de $\mathcal{T}$, la suite $\left(\overline{A_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est quant à elle croissante pour l'inclusion. On peut donc lui appliquer le théorème de limite monotone pour une probabilité, cas croissant. Il en résulte que :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}\right) = \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left(\overline{A_N}\right) = 1 - \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left(A_N\right),$$

d'où en réinjectant dans $(\mathbf{1})$: $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left(A_N\right)$.

Théorème ***(cas d'une suite quelconque)***

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un univers probabilisé. Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{T}$, on a :

- $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right)$.

- •• $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{N} A_n\right)$.

<u>Preuve</u>

La preuve est intéressante car elle montre comment se ramener aisément du cas quelconque au cas croissant *(pour une autre suite, of course…)****.*** *Je traite le cas de la réunion, je vous laisse l'intersection.*

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose : $B_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$.

- Déjà, il est clair que la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion, puisque : $\forall\ n \in \mathbb{N}$,

$$B_{n+1} = \bigcup_{k=0}^{n+1} A_k \supset \bigcup_{k=0}^{n} A_k = B_n .$$

- Maintenant, je dis que $\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$. En effet :

  - ◦ $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset B_n$, donc $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$.

  - ◦ $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $B_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k \subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k$, donc $\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n \subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k$.

Puisque la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion, on peut lui appliquer le théorème de limite monotone pour une probabilité, cas croissant. Il vient alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left(B_N\right)$, autrement dit :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right).$$

Le cas d'une intersection se montre en passant au complémentaire, ou encore en posant $B_n = \bigcap_{k=0}^{n} A_k$ et en appliquant à la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ le théorème de limite monotone pour une probabilité, cas décroissant. □

IV Probabilités conditionnelles ; indépendance

1_ Probabilités conditionnelles

Définition

Soit $\left(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P}\right)$ un univers probabilisé.

Soit A un événement ***non négligeable*** de $\mathcal{T}$, *i.e.* tel que $\mathbb{P}\left(A\right) \neq 0$.

On appelle ***probabilité conditionnelle sachant A*** l'application $\mathbb{P}_A$ définie sur $\mathcal{T}$ par :

$$\underline{\forall\ B \in \mathcal{T},\ \mathbb{P}_A\left(B\right) = \frac{\mathbb{P}\left(B \cap A\right)}{\mathbb{P}\left(A\right)}}\ .$$

On note aussi $\mathbb{P}\left(B \mid A\right)$ la quantité $\mathbb{P}_A\left(B\right)$.

En pratique, on connaît souvent $\mathbb{P}_A\left(B\right)$, la formule précédente s'écrit donc aussi :

$$\underline{\forall\ \left(A, B\right) \in \mathcal{T}^2,\ \mathbb{P}\left(B \cap A\right) = \mathbb{P}_A\left(B\right)\mathbb{P}\left(A\right)}\ .$$

Théorème fondamental

Soit $\left(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P}\right)$ un univers probabilisé. Soit A un événement ***non négligeable*** de $\mathcal{T}$, *i.e.* tel que $\mathbb{P}\left(A\right) \neq 0$.

La probabilité $\mathbb{P}_A$ conditionnelle sachant A est une probabilité sur $\left(\Omega, \mathcal{T}\right)$.

En particulier,

Soit $\left(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P}\right)$ un univers probabilisé, $\left(B, C\right) \in \mathcal{T}^2$ deux événements.

Soit A un événement ***non négligeable*** de $\mathcal{T}$, *i.e.* tel que $\mathbb{P}\left(A\right) \neq 0$. Alors,

• $\mathbb{P}_A\left(\overline{B}\right) = 1 - \mathbb{P}_A\left(B\right)$.

•• $\mathbb{P}_A\left(B \cup C\right) = \mathbb{P}_A\left(B\right) + \mathbb{P}_A\left(C\right) - \mathbb{P}_A\left(B \cap C\right)$.

2_ Indépendance de deux évènements

Définition

Soit $\left(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P}\right)$ un univers probabilisé. Soit $\left(A, B\right) \in \mathcal{T}^2$ deux événements.

A et B sont dits ***indépendants*** si et seulement si $\underline{\mathbb{P}\left(A \cap B\right) = \mathbb{P}\left(A\right)\mathbb{P}\left(B\right)}$.

On note alors parfois $A \perp B$.

Si l'événement A est ***non négligeable***, *i.e.* tel que $\mathbb{P}\left(A\right) \neq 0$, cela revient donc à dire :

$$\underline{A \perp B \iff \mathbb{P}_A\left(B\right) = \mathbb{P}\left(B\right)}\ .$$

En langage naïf, cela signifie donc que l'événement A n'a aucune influence sur B , et réciproquement lorsque B est aussi non négligeable, par symétrie évidente de la relation initiale.

<u>Mise en garde n° 1</u>

La notion d'**indépendance** de deux événements **n'est pas une notion intrinsèque** à ces deux événements. Elle **dépend de la probabilité** $\mathbb{P}$ qui équipe l'univers probabilisable.

Se méfier donc, parfois, de l'intuition …

Mise en garde n° 2

NE SURTOUT PAS CONFONDRE INDEPENDANCE ET INCOMPATIBILITE.

En particulier :

Deux événements indépendants et non négligeables ne sont pas incompatibles.

Propriété

Soit $\left(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P} \right)$ un univers probabilisé. Soit $\left(A, B \right) \in \mathcal{T}^{2}$ deux événements.

On suppose que A et B sont indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$. Alors,

- • A et $\overline{B}$ sont indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$.
- •• $\overline{A}$ et B sont indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$.
- ••• $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$.

3_ *Indépendance mutuelle d'une famille d'évènements*

Définition 1

Soit $\left(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P} \right)$ un univers probabilisé, et $\left(A_1, \dots, A_n \right) \in \mathcal{T}^{n}$ n événements.

$\left(A_1, \dots, A_n \right)$ sont dits ***deux à deux indépendants*** si et seulement si :

$$\forall \left(i, j \right) \in [1, n]^{2}, \ A_i \text{ et } A_j \text{ sont indépendants}.$$

Définition 2

Soit $\left(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P} \right)$ un univers probabilisé, et $A_1, \dots, A_n$ n événements.

$\left(A_1, \dots, A_n \right)$ sont mutuellement indépendants ssi pour toute partie $I \subset [1, n]$,

$$\underline{\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}\left(A_i \right).}$$

Remarque *Il revient klarement au même de dire que :*

$$\forall k \in 1, n , \forall \left\{ i_1, \dots, i_k \right\} \subset [1, n], \mathbb{P}\left(\bigcap_{\ell = 1}^{k} A_{i_\ell} \right) = \prod_{\ell = 1}^{k} \mathbb{P}\left(A_{i_\ell} \right).$$

Proposition 1

L'indépendance mutuelle entraîne l'indépendance deux à deux.

La réciproque est fausse.

Définition 3

Soit $\left(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P} \right)$ un univers probabilisé, et $\left(A_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements.

Les $\left(A_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ sont dits ***mutuellement indépendants*** ssi pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$\left(A_0, \dots, A_n \right)$ sont indépendants au sens vu ci – dessus.

Définition 4

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un univers probabilisé, et $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{T}^I$ une famille d'événements.

Les $(A_i)_{i \in I}$ sont dits ***mutuellement indépendants*** ssi $\forall J \subset I$, J **finie**,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j) .$$

Proposition 2

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements mutuellement indépendants. Alors, la famille $(B_i)_{i \in I}$, où $\forall i \in I$, B_i désigne A_i ou $\overline{A_i}$, est aussi une famille d'événements mutuellement indépendants.

V Les trois formules reines du calcul des probabilités

On convient dans ce paragraphe V. de poser lorsque A est un événement négligeable :

Pour tout évènement B, $\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A) = 0$ **.**

1_ *La formule des probabilités composées*

Théorème

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un univers probabilisé, et $A_1, \ldots, A_n$ n événements.

On suppose que $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors,

$$\boxed{\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) . \mathbb{P}_{A_1}(A_2) . \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \ldots \mathbb{P}_{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)}$$

2_ *La formule des probabilités totales*

Théorème **(cas d'une famille finie)**

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un univers probabilisé. Soit $(A_i)_{i \in [1, n]}$ un système complet ou quasi – complet d'événements.

Alors pour tout évènement B, $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{A_i}(B)\, \mathbb{P}(A_i)$.

Théorème **(cas d'une famille infinie dénombrable indexée par $\mathbb{N}$)**

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un univers probabilisé. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet ou quasi – complet d'événements.

Alors pour tout évènement B :

- La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(B \cap A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_{A_n}(B)\, \mathbb{P}(A_n)$ converge, et
- •• $\boxed{\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{A_n}(B)\, \mathbb{P}(A_n)}$.

Cas particulier fréquent

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un univers probabilisé. Soit A un événement non négligeable et non quasi – certain.

(*i.e.* $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(A) \neq 1$) . Alors, $\forall\ B \in \mathcal{T}$:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_A(B)\ \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)\ \mathbb{P}\left(\overline{A}\right) .$$

3_ ***La formule de Bayes, ou formule de probabilité des causes***

Théorème **(cas d'une famille infinie dénombrable indexée par $\mathbb{N}$)**

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un univers probabilisé. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet ou quasi – complet d'événements de $\mathcal{T}$. Soit B un événement. Alors, pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\mathbb{P}_B\left(A_{n_0}\right) = \frac{\mathbb{P}_{A_{n_0}}(B)\ \mathbb{P}\left(A_{n_0}\right)}{\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{A_n}(B)\ \mathbb{P}\left(A_n\right)}} .$$