DS°5 : corrigé

A. Préliminaires

A.1.a. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, $a \leq b$:

$$\begin{aligned}\binom{b}{a+1} + \binom{b}{a} &= \frac{b!}{(a+1)!(b-a-1)!} + \frac{b!}{a!(b-a)!} \\ &= \frac{b!}{(a+1)!(b-a)!}\big((b-a)+(a+1)\big) \\ &= \frac{(b+1)!}{(a+1)!(b-a)!} \\ &= \frac{(b+1)!}{(a+1)!\big((b+1)-(a+1)\big)!},\end{aligned}$$

donc $\boxed{\binom{b}{a+1} + \binom{b}{a} = \binom{b+1}{a+1}}$.

A.1.b. Comme x est non nul, $\binom{k+n}{n} x^k$ ne s'annule pas, et $\dfrac{\binom{k+1+n}{n} x^{k+1}}{\binom{k+n}{n} x^k} = \dfrac{k+1+n}{k}\, x$,

d'où $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left| \frac{\binom{k+1+n}{n} x^{k+1}}{\binom{k+n}{n} x^k} \right| = x < 1$.

$$\boxed{\text{D'après la règle de d'Alembert, la série } \sum_{k \geq 0} \binom{k+n}{n} x^k \text{ est donc convergente}}.$$

A.2.a. $S(0, x)$ existe d'après **1.b.**, et $S(0, x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+0}{0} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$.

On reconnaît la somme d'une série géométrique (convergente), et l'on en tire $\boxed{S(0, x) = \dfrac{1}{1-x}}$.

A.2.b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, toujours d'après **1.b.**, $\sum_{k \geq 0} \binom{k+n+1}{n+1} x^k$ converge, et

$$(1-x) S(n+1, x) = (1-x) \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n+1}{n+1} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n+1}{n+1} x^k - x \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n+1}{n+1} x^k$$

(ce découpage en deux sommes de séries convergentes est bien autorisé), donc

$$\begin{aligned}
(1-x) S(n+1, x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n+1}{n+1} x^k - \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n+1}{n+1} x^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n+1}{n+1} x^k - \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{k+n}{n+1} x^k \quad \text{(changement d'indice dans la deuxième somme)} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n+1}{n+1} x^k - \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n}{n+1} x^k \quad \text{(ajout du terme d'indice } 0 \text{, nul)} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\binom{k+n+1}{n+1} - \binom{k+n}{n+1} \right] x^k ,
\end{aligned}$$

d'où, d'après la formule de Pascal, $\boxed{(1-x) S(n+1, x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n}{n} x^k = S(n, x)}$.

A.2.c. • La récurrence est débile, mais puisque c'est la première du devoir…

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $\mathcal{H}(n)$ par $\mathcal{H}(n) \Leftrightarrow S(n, x) = \dfrac{1}{(1-x)^{n+1}}$.

Initialisation D'après **a.**, $S(0, x) = \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1}{(1-x)^{0+1}}$, d'où $\mathcal{H}(0)$.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{H}(n)$. Alors

$$\begin{aligned}
S(n+1, x) &= \frac{S(n, x)}{1-x} \quad \text{d'après } \mathbf{b.} \\
&= \frac{1}{(1-x)^{n+2}} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{1}{(1-x)^{(n+1)+1}} ,
\end{aligned}$$

d'où $\mathcal{H}(n+1)$.

Conclusion

On a montré $\mathcal{H}(0)$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}(n) \Rightarrow \mathcal{H}(n+1)$. Le principe du raisonnement par récurrence permet d'en conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathcal{H}(n)$:

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ S(n, x) = \frac{1}{(1-x)^{n+1}}}.$$

• • pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n-1}{n-1} x^k = S(n-1, x)$ existe d'après ce qui précède, et

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n-1}{n-1} x^k = \frac{1}{(1-x)^n}}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $n \geq 1$ $\binom{k+n-1}{n-1} x^n = \binom{k+n-1}{k} x^n$ par propriété de symétrie des coefficients binomiaux. La somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \binom{k+n-1}{n-1} x^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{k+n-1}{n-1} x^{n-1} = x \sum_{m=0}^{+\infty} \binom{k+m}{m} x^m = x\, S(k, x)$$

existe donc, et $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \binom{k+n-1}{n-1} x^n = \frac{x}{(1-x)^{k+1}}}$.

A.3.a. $\forall\, m \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{0} \binom{n+k}{n}\binom{m-k}{m} = \binom{n}{n}\binom{m}{m} = 1 = \binom{m+n+1}{m+n+1}$, on a donc $\boxed{\mathcal{H}(m, 0)}$.

A.3.b. Les esprits cultivés auront remarqué qu'on leur demande là de prouver la formule de Pascal généralisée… ai – je entendu ces petits cris de joie ?

Tout d'abord, $\sum_{k=0}^{\ell} \binom{n+k}{n} = \binom{n+\ell+1}{n+1} \sum_{k=0}^{\ell} \binom{n+k}{n}\binom{\ell-k}{0} = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{n+k}{n}$, on a donc bien $\mathcal{H}(0, \ell) \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\ell} \binom{n+k}{n} = \binom{n+\ell+1}{n+1}$.

Ensuite, on procède par récurrence, et pour une fois on ne précise pas l'hypothèse : c'est déjà fait…

Initialisation

$\sum_{k=0}^{0} \binom{n+k}{n} = \binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1}$, d'où $\mathcal{H}(0, 0)$.

Hérédité

Soit $\ell \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{H}(0, \ell)$. Alors,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\ell+1} \binom{n+k}{n} &= \sum_{k=0}^{\ell} \binom{n+k}{n} + \binom{n+\ell+1}{n} \\ &= \binom{n+\ell+1}{n+1} + \binom{n+\ell+1}{n} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \binom{n+\ell+2}{n+1} \quad \text{d'après la formule de Pascal,} \end{aligned}$$

d'où $\mathcal{H}(0, \ell+1)$.

Conclusion

On a $\mathcal{H}(0,0)$ et pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}(0,\ell) \Rightarrow \mathcal{H}(0,\ell+1)$, le principe du raisonnement par récurrence permet d'en conclure que, $\boxed{\text{pour tout } \ell \in \mathbb{N},\ \mathcal{H}(0,\ell) \text{ est vérifiée}}$.

A.3.c. L'égalité $\dbinom{m+\ell-k+2}{m+1} = \dbinom{m+\ell-k+1}{m+1} + \dbinom{m+\ell-k+1}{m}$,

que l'énoncé donne gentiment, provient bien sûr de la formule de Pascal.

On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\ell+1}\binom{n+k}{n}\binom{m+\ell-k+2}{m+1} &= \sum_{k=0}^{\ell+1}\binom{n+k}{n}\left[\binom{m+\ell-k+1}{m+1}+\binom{m+\ell-k+1}{m}\right]\\ &= \sum_{k=0}^{\ell+1}\binom{n+k}{n}\binom{m+\ell-k+1}{m+1} + \sum_{k=0}^{\ell+1}\binom{n+k}{n}\binom{m+\ell-k+1}{m}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\ell+1}\binom{n+k}{n}\binom{m+\ell-k+1}{m+1} &= \sum_{k=0}^{\ell}\binom{n+k}{n}\binom{m+\ell-k+1}{m+1} \quad \text{(suppression d'un terme nul)}\\ &= \binom{m+n+\ell+2}{m+n+2}\end{aligned}$$

d'après $\mathcal{H}(m+1,\ell)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{\ell+1}\binom{n+k}{n}\binom{m+\ell-k+1}{m} = \binom{m+\ell+2}{m+n+1}$ d'après $\mathcal{H}(m,\ell+1)$.

On a donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\ell+1}\binom{n+k}{n}\binom{m+\ell-k+2}{m+1} &= \binom{m+n+\ell+2}{m+n+2} + \binom{m+\ell+2}{m+n+1}\\ &= \binom{m+n+\ell+3}{m+n+2} \quad (\textit{formule de Pascal})\\ &= \binom{(m+1)+n+(\ell+1)+1}{(m+1)+n+1},\end{aligned}$$

d'où $\mathcal{H}(m+1,\ell+1)$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\ell+1}\binom{n+k}{n}\binom{(m+1)+(\ell+1)-k}{m+1} = \binom{(m+1)+n+(\ell+1)+1}{(m+1)+n+1}}.$$

A.3.d. Pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, considérons la propriété $\mathcal{P}(\ell) \Leftrightarrow (\forall\ m \in \mathbb{N},\ \mathcal{H}(m,\ell))$

Initialisation

D'après **a.**, on a $\mathcal{H}(m,0)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, d'où $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité

Soit $\ell \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(\ell)$. Alors :

- $\mathcal{H}(0, \ell+1)$ est vérifiée d'après **b.** ;

•• d'après **c.**, on a pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}(m, \ell+1) \Rightarrow \mathcal{H}(m+1, \ell+1)$.

Le principe du raisonnement par récurrence assure alors que l'on a

$\mathcal{P}(\ell+1) : \forall\ m \in \mathbb{N}\ ,\ \mathcal{H}(m, \ell+1)$.

Conclusion

On a $\mathcal{P}(0)$ et pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(\ell+1) \Rightarrow \mathcal{P}(\ell+1)$, d'où $\mathcal{P}(\ell)$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$:

$$\forall\ (m, \ell) \in \mathbb{N}^2\ ,\ \mathcal{H}(m, \ell) : \sum_{k=0}^{\ell} \binom{n+k}{n}\binom{m+\ell-k}{m} = \binom{m+n+\ell+1}{m+n+1}\ .$$

B. Lois binomiales négatives

B.1.a. • Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\binom{n+k-1}{n-1} p^n q^k$ est positif ou nul.

•• Comme $q \in \left]0, 1\right[$, d'après **A.2.c.** $p^n \sum_{k \geq 0} \binom{k+n-1}{n-1} q^k$ converge, et

$$p^n \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n-1}{n-1} q^k = p^n S(n-1, q) = \frac{p^n}{(1-q)^n} = 1.$$

On sait alors qu'$\boxed{\text{il existe effectivement une variable aléatoire } U, \text{ à valeurs entières et telle que}}$

$$\boxed{\text{pour tout } \forall\ k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(U = k) = \binom{n+k-1}{n-1} p^n q^k}.$$

B.1.b. • Sous réserve de convergence absolue, le théorème de transfert donne

$$\mathbb{E}(U+n) = \sum_{k=0}^{+\infty} (n+k)\binom{n+k-1}{n-1} p^n q^k,$$

puis d'après la formule d'Euler, $\mathbb{E}(U+n) = \sum_{k=0}^{+\infty} n \binom{n+k}{n} p^n q^k$, soit

$\mathbb{E}(U+n) = \dfrac{n}{p} \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k}{n} p^{n+1} q^k$. D'après **a.**, $\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k}{n} p^{n+1} q^k$ existe et vaut 1 (car

$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k}{n} p^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(V = k)$, où $V \hookrightarrow \mathcal{B}^-(n+1, p)$).

La convergence étant évidemment absolue, $\mathbb{E}(U+n)$ existe, et

$$\boxed{\mathbb{E}(U+n) = \frac{n}{p}\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{n+k}{n}p^{n+1}q^k = \frac{n}{p}}.$$

• • De même, sous réserve de convergence absolue :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big((U+n)(U+n+1)\big) &= \sum_{k=0}^{+\infty}(n+k+1)(n+k)\binom{n+k-1}{n-1}p^n q^k && \text{(théorème de transfert)}\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} n(n+k+1)\binom{n+k}{n}p^n q^k && \text{(formule d'Euler)}\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} n(n+1)\binom{n+k+1}{n+1}p^n q^k && \text{(re} - \text{formule d'Euler)}\\
&= \frac{n(n+1)}{p^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{n+k+1}{n+1}p^{n+2}q^k .
\end{aligned}$$

$\sum\binom{n+k+1}{n+1}p^{n+2}q^k$ converge, et $\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{n+k+1}{n+1}p^{n+2}q^k = 1$, car

$\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{n+k+1}{n+1}p^{n+2}q^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(W=k)$, où $W \hookrightarrow \mathcal{B}^-(n+2,\,p)$). La encore, la

convergence est clairement absolue ; $(U+n)(U+n+1)$ possède donc une espérance, et

$$\boxed{\mathbb{E}\big((U+n)(U+n+1)\big) = \frac{n(n+1)}{p^2}}.$$

B.1.c. • Par linéarité, U possède une espérance, et $\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(U+n) - n = \dfrac{n}{p} - n = \boxed{\dfrac{nq}{p}}$.

• • $\mathbb{E}\big((U+n)(U+n+1)\big) = \mathbb{E}\big(U^2 + (2n+1)U + n(n+1)\big)$ existe et $\mathbb{E}(U)$ existe,

donc, à nouveau par linéarité, $\mathbb{E}(U^2)$ existe, et

$$\mathbb{E}(U^2) = \mathbb{E}\big((U+n)(U+n+1)\big) - (2n+1)\,\mathbb{E}(U) - n(n+1).$$

Il en résulte que U possède une variance, et

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(U) &= \mathbb{E}\left(U^2\right) - \mathbb{E}(U)^2 \\
&= \mathbb{E}\left((U+n)(U+n+1)\right) - (2n+1)\mathbb{E}(U) - n(n+1) - \mathbb{E}(U)^2 \\
&= \frac{n(n+1)}{p^2} - (2n+1)\frac{nq}{p} - n(n+1) - \frac{n^2q^2}{p^2} \\
&= n\,\frac{(n+1) - (2n+1)pq - (n+1)p^2 - nq^2}{p^2} \\
&= n\,\frac{n\left(1 - 2pq - p^2 - q^2\right) + \left(1 - pq - p^2\right)}{p^2} \\
&= n\,\frac{n\left(1 - (p+q)^2\right) + \left(1 - p(p+q)\right)}{p^2} = n\,\frac{(1-p)}{p^2},
\end{aligned}$$

d'où $\boxed{\mathbb{V}(U) = \dfrac{nq}{p^2}}$.

B.2.a. Posons $Y = X_n + X_m$. Y est évidement à valeurs dans $\mathbb{N}$, et, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, on peut écrire, en faisant intervenir $\left((X_n = k)\right)_{k \in \mathbb{N}}$, système complet d'évènements associé à X_n, que

$$\mathbb{P}(Y = \ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left((X_n = k) \cap (Y = \ell)\right).$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = \ell) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left((X_n = k) \cap (X_n + X_m = \ell)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left((X_n = k) \cap (X_m = \ell - k)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\ell} \mathbb{P}\left((X_n = k) \cap (X_m = \ell - k)\right),
\end{aligned}$$

car lorsque $k > \ell$, l'évènement $(X_m = \ell - k)$ est quasi – impossible.

Par indépendance de X_n et X_m, il vient $\mathbb{P}(Y = \ell) = \sum_{k=0}^{\ell} \mathbb{P}(X_n = k)\,\mathbb{P}(X_m = \ell - k)$,

d'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = \ell) &= \sum_{k=0}^{\ell} \binom{n+k-1}{n-1} p^n q^k \binom{m+\ell-k-1}{m-1} p^m q^{\ell-k} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\ell} \binom{n+k-1}{n-1}\binom{m+\ell-k-1}{m-1}\right) p^{n+m} q^{\ell}.
\end{aligned}$$

La relation $\sum_{k=0}^{\ell} \binom{n'+k}{n'}\binom{m'+\ell-k}{m'} = \binom{m'+n'+\ell+1}{m'+n'+1}$, prouvée en **A.3.** et appliquée avec $n' = n - 1$ et $m' = m - 1$, donne

$$\sum_{k=0}^{\ell} \binom{n+k-1}{n-1} \binom{m+\ell-k-1}{m-1} = \binom{m+n+\ell-1}{m+n-1}.$$

On en conclut que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\left(Y = \ell\right) = \binom{m+n+\ell-1}{m+n-1} p^{n+m} q^{\ell}$, et ainsi

$\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{B}^{-}\left(n+m, p\right)}$.

B.2.b. ***i*** – Si $U \hookrightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{N}}\left(p\right)$, U est à valeurs dans $\mathbb{N}$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\left(U = k\right) = p\,q^{k} = \binom{1+k-1}{1-1} p^{1} q^{k} :$$

$\boxed{\text{la loi } \mathcal{G}_{\mathbb{N}}\left(p\right) \text{ est donc la loi binomiale négative } \mathcal{B}^{-}\left(1, p\right)}$.

ii – Il s'agit ici d'une récurrence, qu'on n'est pas obligé de rédiger entièrement puisqu'on s'en est déjà tapé pas mal :

$\sum_{j=1}^{1} U_j = U_1$ suit, on vient de le dire, la loi $\mathcal{B}^{-}\left(1, p\right)$.

Si l'on suppose que, pour un entier $k \in \; 1, n-1 \;$ fixé, $\sum_{j=1}^{k} U_j$ suit la loi $\mathcal{B}^{-}\left(k, p\right)$, alors

$\sum_{j=1}^{k+1} U_j = \sum_{j=1}^{k} U_j + U_{k+1}$, avec $\sum_{j=1}^{k} U_j \hookrightarrow \mathcal{B}^{-}\left(k, p\right)$, $U_{k+1} \hookrightarrow \mathcal{B}^{-}\left(1, p\right)$, et U_{k+1} indépendante de $\sum_{j=1}^{k} U_j$. On peut donc appliquer le résultat de la question **a.** ; on en déduit que

$\sum_{j=1}^{k+1} U_j \hookrightarrow \mathcal{B}^{-}\left(k+1, p\right)$, et l'on a montré par récurrence que pour tout $k \in \; 1, n \;$,

$\sum_{j=1}^{k} U_j \hookrightarrow \mathcal{B}^{-}\left(k, p\right)$. En particulier, ceci est vrai lorsque $k = n$: $\boxed{\sum_{j=1}^{n} U_j \hookrightarrow \mathcal{B}^{-}\left(n, p\right)}$.

iii – Soit U une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}^{-}\left(n, p\right)$. D'après ce qui précède, U suit la même loi que $\sum_{j=1}^{n} U_j$. Or pour tout $j \in \; 1, n \;$, $U_j \hookrightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{N}}\left(p\right)$, donc U_j possède une espérance et une variance, données par $\mathbb{E}\left(U_j\right) = \dfrac{q}{p}$ et $\mathbb{V}\left(U_j\right) = \dfrac{q}{p^2}$.

On en déduit que U possède elle aussi une espérance et une variance, et :

- Par linéarité, $\mathbb{E}\left(U\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{n} U_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left(U_j\right) = \boxed{\dfrac{n\,q}{p}}$.

• • Par indépendance, $\mathbb{V}\left(U\right) = \mathbb{V}\left(\sum_{j=1}^{n} U_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{V}\left(U_j\right) = \boxed{\dfrac{n\,q}{p^2}}$.

On retrouve bien les résultats de la question **B.1.c.** , ce qui n'est pas malheureux.

B.3. Commençons par remarquer que V est clairement à valeurs dans $\mathbb{N}$.

B.3.a. Si l'on suppose $\left(N = n\right)$ réalisé, on a $V = \sum_{j=1}^{n} U_j$, et d'après **2.b.** ***ii*** **–** , il en résulte que conditionnellement à $\left(N = n\right)$, V suit la loi $\mathcal{B}^{-}\left(n,\, p\right)$.

Par suite, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\boxed{\mathbb{P}\left(V = k \mid N = n\right) = \binom{n + k - 1}{n - 1} p^n\, q^k}$.

B.3.b. $\left(\left(N = n\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant un système complet d'évènements tous non négligeables, la formule des probabilités totales assure que la série $\sum \mathbb{P}\left(V = k \mid N = n\right) \mathbb{P}\left(N = n\right)$, et que

$\mathbb{P}\left(V = k\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(V = k \mid N = n\right) \mathbb{P}\left(N = n\right)$. En explicitant le terme général de cette somme, il vient : $\boxed{\mathbb{P}\left(V = k\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n + k - 1}{n - 1} p^n\, q^k\, \alpha\, \beta^{n-1}}$.

B.3.c. On a déjà dit que V est à valeurs dans $\mathbb{N}$, et d'après ce qui précède, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\left(V = k\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n + k - 1}{n - 1} p^n\, q^k\, \alpha\, \beta^{n-1} .$$

On a donc $\mathbb{P}\left(V = k\right) = \dfrac{\alpha\, q^k}{\beta} \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n + k - 1}{n - 1} \left(p\,\beta\right)^n$. Comme $0 < p\,\beta < 1$, on peut utiliser la formule $\sum_{n=1}^{+\infty} \binom{k + n - 1}{n - 1} x^n = \dfrac{x}{\left(1 - x\right)^{k+1}}$ démontrée en **A.2.c.** . Il vient alors

$\mathbb{P}\left(V = k\right) = \dfrac{\alpha\, q^k}{\beta} \dfrac{p\,\beta}{\left(1 - p\,\beta\right)^{k+1}}$, soit :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(V = k\right) &= \frac{\alpha\, p}{1 - p\,\beta} \left(\frac{q}{1 - p\,\beta}\right)^k = \frac{\alpha\, p}{1 - p\left(1 - \alpha\right)} \left(\frac{q}{1 - p\left(1 - \alpha\right)}\right)^k \\ &= \frac{\alpha\, p}{1 - p + \alpha\, p} \left(\frac{q}{1 - p + \alpha\, p}\right)^k = \frac{\alpha\, p}{q + \alpha\, p} \left(\frac{q}{q + \alpha\, p}\right)^k .\end{aligned}$$

Comme $\dfrac{q}{q + \alpha p} = 1 - \dfrac{\alpha p}{q + \alpha p}$, on peut réécrire ceci sous la forme :

$\mathbb{P}\left(V = k\right) = \dfrac{\alpha p}{q + \alpha p}\left(1 - \dfrac{\alpha p}{q + \alpha p}\right)^{k}$, et l'on en conclut que

$\boxed{V \text{ suit la loi géométrique sur } \mathbb{N} \text{ de paramètre } \dfrac{\alpha p}{q + \alpha p}}$.

C. Modélisation du passage des bus

C.1. ***i*** – $N_m = 0$ si et seulement si aucun bus n'est passé à l'arrêt dans l'intervalle de temps $0, m$, donc si et seulement si le premier bus est passé à un instant strictement supérieur à m.

T_1 étant l'instant de passage du premier bus, on a bien égalité entre les deux évènements :

$\boxed{\left(N_m = 0\right) = \left(m < T_1\right)}$.

ii – Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(N_m = n\right)$ est réalisé si et seulement si exactement n bus sont passés à l'arrêt dans l'intervalle de temps $0, m$, donc si et seulement si le n – ième bus est arrivé à un instant $T_n \leq m$ et le $\left(n + 1\right)$ – ième bus à un instant $T_{n+1} > m$, d'où l'égalité

$\boxed{\left(N_m = n\right) = \left(T_n \leq m < T_{n+1}\right)}$.

C.2.a. Par hypothèse, $T_n = \sum_{j=1}^{n} U_j$, où les U_j suivent toutes la loi $\mathcal{G}_{\mathbb{N}}\left(p\right)$ et sont mutuellement indépendantes. D'après **B.2.b.** ***ii*** –, T_n suit donc la loi $\boxed{\mathcal{B}^-\left(n, p\right)}$:

$\boxed{T_n \text{ est à valeurs dans } \mathbb{N} \text{ et pour tout } k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\left(T_n = k\right) = \binom{n + k - 1}{n - 1} p^n q^k}$.

C.2.b. • $N_m \geq n$ si et seulement si n bus au moins sont passés dans l'intervalle de temps $0, m$, donc si et seulement si le n – ième bus est passé dans l'intervalle de temps $N_m \geq n$: on a bien $\left(N_m \geq n\right) = \left(T_n \leq m\right)$.

• • Il en résulte que $\mathbb{P}\left(N_m \geq n\right) = \mathbb{P}\left(T_n \leq n\right) = \sum_{k=0}^{m} P\left(T_n = k\right)$, et, comme

$T_n \hookrightarrow \mathcal{B}^-(n, p)$, on en déduit que $\boxed{\mathbb{P}\left(N_m \geq n\right) = \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k-1}{n-1} p^n q^k}$.

C.2.c. N_m est évidemment à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$\mathbb{P}\left(N_m = n\right) = \mathbb{P}\left(N_m \geq n\right) - \mathbb{P}\left(N_m \geq n+1\right)$, donc d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(N_m = n\right) &= \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k-1}{n-1} p^n q^k - \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{n} p^{n+1} q^k \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k-1}{n-1} p^n q^k - \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{n} p^n (1-q) q^k \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k-1}{n-1} p^n q^k - \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{n} p^n q^k + \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{n} p^n q^{k+1},
\end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(N_m = n\right) &= \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k-1}{n-1} p^n q^k - \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{n} p^n q^k + \sum_{k=1}^{m+1} \binom{n+k-1}{n} p^n q^k \\
&= \sum_{k=0}^{m} \left[\binom{n+k-1}{n-1} + \binom{n+k-1}{n} - \binom{n+k}{n}\right] p^n q^k + \binom{n+m}{n} p^n q^{m+1}.
\end{aligned}$$

La formule de Pascal donnant $\binom{n+k-1}{n-1} + \binom{n+k-1}{n} - \binom{n+k}{n} = 0$, on a finalement

$\mathbb{P}\left(N_m = n\right) = \binom{n+m}{n} p^n q^{m+1}$, et ainsi $\boxed{N_m \hookrightarrow \mathcal{B}^-(m+1, q)}$.

C.3.a. Si l'on suppose $\left(N_m = n\right)$ réalisé, n bus se présentent à l'arrêt dans l'intervalle de temps $\left]0, m\right]$.

Chacun d'entre eux a pour terminus A avec probabilité α, et ce indépendamment les uns des autres.

Conditionnellement à $\left(N_m = n\right)$, A_m suit donc $\boxed{\text{la loi binomiale } \mathcal{B}(n, \alpha)}$: conditionnellement à

$\left(N_m = n\right)$, A_m est à valeurs dans $\llbracket 0, m \rrbracket$, et pour tout $k \in \llbracket 0, m \rrbracket$,

$$\boxed{\mathbb{P}\left(A_m = k \mid N_m = n\right) = \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k}}.$$

C.3.b. A_m est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. La famille $\left(\left(N_m = n\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements, la formule des

probabilités totales assure donc que la série $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}\left(A_m = k \mid N_m = n\right) \mathbb{P}\left(N_m = n\right)$ converge, et

que $$\mathbb{P}\left(A_m = k\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(A_m = k \mid N_m = n\right) \mathbb{P}\left(N_m = n\right).$$

Lorsque $n < k$, $\mathbb{P}\left(A_m = k \mid N_m = n\right) = 0$ (il ne peut pas y avoir plus de bus ayant pour terminus A, que de bus au total), l'égalité précédente devient donc :

$$\mathbb{P}\left(A_m = k\right) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}\left(A_m = k \mid N_m = n\right) \mathbb{P}\left(N_m = n\right).$$

Les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}\left(A_m = k \mid N_m = n\right)$ ont été déterminées dans la question précédente, et l'on a prouvé que $N_m \hookrightarrow \mathcal{B}^-\left(m+1, q\right)$, on obtient alors

$$\mathbb{P}\left(A_m = k\right) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} \binom{n+m}{m} p^n q^{m+1}, \text{ d'où}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(A_m = k\right) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} \binom{n+m}{m} p^n q^{m+1} \\
&= \frac{\alpha^k p^k q^{m+1}}{k!\,m!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(n+m)!}{(n-k)!} \beta^{n-k} p^{n-k} \\
&= \frac{\alpha^k p^k q^{m+1}}{k!\,m!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(j+k+m)!}{j!} (\beta p)^j \\
&= \frac{(k+m)!}{k!\,m!} \alpha^k p^k q^{m+1} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(j+k+m)!}{j!\,(k+m)!} (\beta p)^j \\
&= \binom{k+m}{k} (\alpha p)^k q^{m+1} \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{j+k+m}{k+m} (\beta p)^j,
\end{aligned}$$

et l'égalité $S\left(n', x\right) = \dfrac{1}{(1-x)^{n'+1}}$, appliquée avec $n' = k + m$ et $x = \beta p$, permet d'en conclure que $\mathbb{P}\left(A_m = k\right) = \dbinom{k+m}{k} (\alpha p)^k q^{m+1} \dfrac{1}{(1-\beta p)^{k+m+1}}$.

On transforme un peu cette expression :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(A_m = k\right) &= \binom{k+m}{k} (\alpha p)^k q^{m+1} \frac{1}{\left(1-(1-\alpha)p\right)^{k+m+1}} \\
&= \binom{k+m}{k} (\alpha p)^k q^{m+1} \frac{1}{(1-p+\alpha p)^{k+m+1}} \\
&= \binom{k+m}{k} (\alpha p)^k q^{m+1} \frac{1}{(q+\alpha p)^{k+m+1}} \\
&= \binom{k+m}{k} \left(\frac{q}{q+\alpha p}\right)^{m+1} \left(\frac{\alpha p}{q+\alpha p}\right)^k \\
&= \binom{k+m}{k} \left(\frac{q}{q+\alpha p}\right)^{m+1} \left(1 - \frac{q}{q+\alpha p}\right)^k,
\end{aligned}$$

et ainsi $\boxed{A_m \hookrightarrow \mathcal{B}^-\left(m+1, \dfrac{q}{\alpha p + q}\right)}$. Par symétrie, $\boxed{B_m \hookrightarrow \mathcal{B}^-\left(m+1, \dfrac{q}{\beta p + q}\right)}$.

C.3.c. • D'après ce qui précède,

$$\mathbb{P}\left(A_m = k\right) = \binom{k+m}{k}\left(\frac{q}{q+\alpha p}\right)^{m+1}\left(1-\frac{q}{q+\alpha p}\right)^{k}$$
$$= \binom{k+m}{k}\left(\frac{q}{q+\alpha p}\right)^{m+1}\left(\frac{q+\alpha p-q}{q+\alpha p}\right)^{k}$$
$$= \boxed{\binom{k+m}{k}\left(\frac{q}{q+\alpha p}\right)^{m+1}\left(\frac{\alpha p}{q+\alpha p}\right)^{k}}$$

•• On a $\mathbb{P}\left(B_m = 0\right) = \binom{0+m}{0}\left(\frac{q}{q+\beta p}\right)^{m+1}\left(1-\frac{q}{q+\beta p}\right)^{0} = \boxed{\left(\frac{q}{q+\beta p}\right)^{m+1}}$.

••• Enfin,

$$\mathbb{P}\left(A_m = k, B_m = 0\right) = \mathbb{P}\left(A_m = k, N_m = k\right)$$
$$= \mathbb{P}\left(A_m = k \mid N_m = k\right)\mathbb{P}\left(N_m = k\right)$$
$$= \boxed{\alpha^k\binom{k+m}{m}p^k q^{m+1}}\ .$$

Si l'on suppose A_m et B_m indépendantes, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\left(A_m = k, B_m = 0\right) = \mathbb{P}\left(A_m = k\right)\mathbb{P}\left(B_m = 0\right),$$

soit $\binom{k+m}{k}\left(\frac{q}{q+\alpha p}\right)^{m+1}\left(\frac{q}{q+\beta p}\right)^{m+1}\left(\frac{\alpha p}{q+\alpha p}\right)^{k} = \alpha^k\binom{k+m}{m}p^k q^{m+1}$,

puis en simplifiant, $\left(\frac{q}{\left(q+\alpha p\right)\left(q+\beta p\right)}\right)^{m+1}\left(\frac{1}{q+\alpha p}\right)^{k} = 1$.

Mais $0 < q+\alpha p < q+p = 1$; on a donc $\lim\limits_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{q+\alpha p}\right)^{k} = +\infty$, d'où également

$\lim\limits_{k\to+\infty}\left(\frac{q}{\left(q+\alpha p\right)\left(q+\beta p\right)}\right)^{m+1}\left(\frac{1}{q+\alpha p}\right)^{k} = +\infty$ ($\left(\frac{q}{\left(q+\alpha p\right)\left(q+\beta p\right)}\right)^{m+1}$ est indépendant de k). L'égalité $\forall\ k$, $\left(\frac{q}{\left(q+\alpha p\right)\left(q+\beta p\right)}\right)^{m+1}\left(\frac{1}{q+\alpha p}\right)^{k} = 1$ est donc absurde, et ainsi $\boxed{\text{les variables aléatoires } A_m \text{ et } B_m \text{ ne sont pas indépendantes}}$.

D. Absence de mémoire

D.1.a. ***i*** – $N_v - N_u$ est le nombre de bus se présentant à l'arrêt dans l'intervalle $0, v$, auquel on retranche le nombre de bus se présentant à l'arrêt dans l'intervalle $0, u$.

$N_v - N_u$ représente donc le nombre de bus passant dans l'intervalle de temps u, v, ou encore $\boxed{\text{le nombre de bus se présentant dans l'intervalle } u + 1, v}$.

En particulier, $N_{a+m} - N_{a-1}$ est le nombre de bus se présentant à l'arrêt dans l'intervalle de temps $a, a + m$, donc $\boxed{M_m = N_{a+m} - N_{a-1}}$.

ii – L'événement $\left(T'_1 = m \right)$ est réalisé si et seulement le premier bus arrivant à l'arrêt, à partir de l'instant a, le fait à l'instant $a + m$, donc si et seulement si :

- Un certain nombre $n \in \mathbb{N}$ de bus arrivent à l'arrêt strictement avant l'instant $a + m$;
- le bus suivant, donc le bus $n + 1$, arrive exactement à l'instant $a + m$.

Autrement dit, $\left(T'_1 = m \right)$ et réalisé si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $T_n < a$ et $T_{n+1} = a + m$, d'où l'égalité $\boxed{\left(T'_1 = m \right) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \left[\left(T_n < a \right) \cap \left(T_{n+1} = a + m \right) \right]}$.

On peut observer que le terme d'indice 0 de cette réunion est un peu particulier, car on a simplement $\left(T_0 < a \right) \cap \left(T_1 = a + m \right) = \left(T_1 = a + m \right)$.

iii – • T_0 est constante (égale à 0), donc indépendante de n'importe qui, et en particulier de U_1.

Le couple $\left(T_0 , U_1 \right)$ est à valeurs dans $\{ 0 \} \times \mathbb{N}$, et pour tout $\ell \in \mathbb{N}$,

$\mathbb{P}\left(T_0 = 0 , U_1 = \ell \right) = \mathbb{P}\left(U_1 = \ell \right) = p\, q^{\ell}$.

• • Si l'on suppose maintenant $n \geq 1$, $T_n = \sum_{j=1}^{n} U_j$ est une fonction des variables aléatoires $U_1, U_2, \ldots, U_n$, qui sont indépendantes de U_{n+1}. $\boxed{T_n \text{ est donc indépendante de } U_{n+1}}$ (d'après le lemme des coalitions).

On en déduit que le couple $\left(T_n , U_{n+1} \right)$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, et que pour tout $\left(k, \ell \right) \in \mathbb{N}^2$,

$\mathbb{P}\left(T_n = k , U_{n+1} = \ell \right) = \mathbb{P}\left(T_n = k \right) \mathbb{P}\left(U_{n+1} = \ell \right)$, soit

$$\boxed{\mathbb{P}\left(T_n = k , U_{n+1} = \ell \right) = \binom{k + n - 1}{n - 1} p^n q^k \, p\, q^{\ell}}.$$

D.1.b. D'après ***ii*** –, $\left(T'_1 = m \right) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \left[\left(T_n < a \right) \cap \left(T_{n+1} = a + m \right) \right]$. Cette réunion est disjointe (le nombre de bus passant strictement avant l'instant a ne peut pas prendre simultanément deux valeurs n distinctes) ; ceci entraîne que la série $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}\left(\left(T_n < a\right) \cap \left(T_{n+1} = a + m\right)\right)$ converge, et que $\mathbb{P}\left(T'_1 = m\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\left(T_n < a\right) \cap \left(T_{n+1} = a + m\right)\right)$.

Vu le résultat attendu, et vue la question précédente, il paraît raisonnable de mettre à part le terme d'indice 0, et de faire intervenir les variables aléatoires U_{n+1}. On écrit donc que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(T'_1 = m\right) &= \mathbb{P}\left(T_1 = a + m\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\left(T_n < a\right) \cap \left(T_{n+1} = a + m\right)\right)\\ &= \mathbb{P}\left(T_1 = a + m\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\left(T_n < a\right) \cap \left(U_{n+1} + T_n = a + m\right)\right)\\ &= \mathbb{P}\left(T_1 = a + m\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{a-1} \mathbb{P}\left(\left(T_n = k\right) \cap \left(U_{n+1} + T_n = a + m\right)\right),\end{aligned}$$

soit $\mathbb{P}\left(T'_1 = m\right) = \mathbb{P}\left(T_1 = a + m\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{a-1} \mathbb{P}\left(\left(T_n = k\right) \cap \left(U_{n+1} = a + m - k\right)\right)$,

puis d'après ***iii*** – :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(T'_1 = m\right) = p\, q^{a+m} + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{a-1} \binom{k + n - 1}{n - 1} p^n q^k\, p\, q^{a+m-k}}.$$

D.1.c. T'_1 est à valeurs dans $\mathbb{N}$, et l'on déduit de ce qui précède que pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\left(T'_1 = m\right) = p\, q^{a+m} + \sum_{k=0}^{a-1} \left(q^k\, p\, q^{a+m-k} \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{k + n - 1}{n - 1} p^n \right) :$$

l'interversion des sommes ne pose pas de problème, puisque l'une d'entre elles est finie, et que toutes les séries mises en jeu sont bien convergentes.

D'après **A.2.c.**, $\sum_{n=1}^{+\infty} \binom{k + n - 1}{n - 1} p^n = \dfrac{p}{q^{k+1}}$, on obtient donc

$$\mathbb{P}\left(T'_1 = m\right) = p\, q^{a+m} + \sum_{k=0}^{a-1} p^2\, q^{a+m-k-1}.$$

La somme obtenue est maintenant géométrique (de raison $\dfrac{1}{q} \neq 1$), et l'on en tire

$$\mathbb{P}\left(T'_1 = m\right) = p\,q^{a+m} + p^2\,q^{a+m-1}\,\frac{1-\dfrac{1}{q^a}}{1-\dfrac{1}{q}}$$

$$= p\,q^{a+m} + p^2\,q^{a+m-1}\,\frac{q-\dfrac{1}{q^{a-1}}}{q-1}$$

$$= p\,q^{a+m} - p\,q^{a+m-1}\left(q-\frac{1}{q^{a-1}}\right),$$

d'où $\mathbb{P}\left(T'_1 = m\right) = p\,q^m$, et ainsi $\boxed{T'_1 \text{ suit la loi géométrique sur } \mathbb{N} \text{ de paramètre } p}$.

D.1.d. Dire que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, M_m a la même loi que N_m, revient à dire que la variable aléatoire représentant le nombre de bus passant à l'arrêt dans l'intervalle de temps $\llbracket a, a+m \rrbracket$ suit la même loi que celle qui modélise le nombre de bus arrivant à cet arrêt dans l'intervalle $\llbracket 0, m \rrbracket$. Autrement dit, la loi de la var. égale au nombre de bus arrivant à l'arrêt durant un intervalle de temps ne dépend que de la longueur de cet intervalle, et pas de ce qui s'est passé auparavant, d'où le nom d'**absence de mémoire** ou d'**amnésie** donné à cette propriété.

D.2. Paradoxe du bus

D.2.a. • N_m est le nombre de bus arrivés à l'arrêt dans l'intervalle $\llbracket 0, m \rrbracket$; autre façon de voir, N_m est le numéro du dernier bus qui est arrivé à l'arrêt dans l'intervalle $\llbracket 0, m \rrbracket$ (avec la convention que, si aucun bus n'est passé, on considère que ce numéro est égal à 0).

Pour $n \in \mathbb{N}$, T_n représente l'instant d'arrivée du n – ième bus à l'arrêt (avec là encore une convention : $T_0 = 0$, ce qui revient à considérer un « zero – ième bus » fictif, qui passerait à l'arrêt à l'instant 0).

Si l'on met tout ceci bout à bout, on en déduit que T_{N_m} représente l'instant d'arrivée du dernier bus passant à l'arrêt dans l'intervalle $\llbracket 0, m \rrbracket$, avec la convention que, si aucun bus ne passe dans cet intervalle, l'instant d'arrivée est considéré comme égal à 0 .

• • $a - T_{N_a}$ représente donc l'intervalle de temps entre l'instant a d'arrivée de l'employé, et l'instant de passage du dernier bus arrivé dans l'intervalle $\llbracket 0, a \rrbracket$ (et, si aucun bus n'est passé dans cet intervalle de temps, $a - T_{N_a} = a$.

On a donc bien $\boxed{\Delta = a - T_{N_a}}$.

D.2.b. $\left(\Delta = a\right)$ est réalisé si et seulement si :

aucun bus n'arrive à l'arrêt dans l'intervalle $0, a$

ou

un ou plusieurs bus arrivent à l'arrêt à l'instant 0, mais aucun bus ne passe entre les instants 1 et a.

Pour dire cela plus simplement, $\left(\Delta = a\right)$ est réalisé si et seulement si aucun bus ne passe dans l'intervalle $1, a$, ou encore, si l'on note N''_a la variable aléatoire représentant le nombre de bus arrivés dans l'intervalle $1, a$, on a $\left(\Delta = a\right) = \left(N''_a = 0\right)$.

On a admis en fin de question **1.** que, pour a et m entiers fixés, le nombre de bus arrivés dans l'intervalle $a, a+m$ suit la même loi que N_m. Ici, N''_a suit donc la même loi que N_{a-1}, à savoir la loi $\mathcal{B}^-\left(a, q\right)$. On en déduit que $\boxed{\mathbb{P}\left(\Delta = a\right) = \mathbb{P}\left(N''_a = 0\right) = \binom{a-1}{a-1} q^a p^0 = q^a}$.

D.2.c. • L'évènement $\left(\Delta = j\right)$ est réalisé si et seulement si un bus est passé à l'instant $a - j$ et aucun bus n'est passé dans l'intervalle $a - j, a$, donc, en considérant le dernier bus passé à l'instant $a - j$, $\left(\Delta = j\right)$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que le n – ième bus passe à l'instant $a - j$, et le $\left(n+1\right) -$ ième à un instant strictement supérieur à a.

Autrement dit, $\left(\Delta = j\right) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[\left(T_n = a - j\right) \cap \left(T_{n+1} > a\right)\right]$, d'où l'on déduit que

$$\begin{aligned}\left(\Delta = j\right) &= \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[\left(T_n = a - j\right) \cap \left(T_n + U_{n+1} > a\right)\right] \\ &= \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[\left(T_n = a - j\right) \cap \left(U_{n+1} > j\right)\right].\end{aligned}$$

Les évènements $\left[\left(T_n = a - j\right) \cap \left(U_{n+1} > j\right)\right]$, $n \in \mathbb{N}^*$, sont incompatibles ; il en résulte que la série $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}\left(\left(T_n = a - j\right) \cap \left(U_{n+1} > j\right)\right)$ converge, et que

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\Delta = j\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\left(T_n = a - j\right) \cap \left(U_{n+1} > j\right)\right)}.$$

• • Par indépendance de T_n et U_{n+1}, on en tire

$$\mathbb{P}\left(\Delta = j\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(T_n = a - j\right) \mathbb{P}\left(U_{n+1} > j\right).$$

Il vient ensuite

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\Delta = j) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n-1+a-j}{n-1} p^n q^{a-j} \sum_{k=j+1}^{+\infty} p\, q^k \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n-1+a-j}{n-1} p^n q^{a-j} \frac{p\, q^{j+1}}{1-q} \\
&= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n-1+a-j}{n-1} p^n \right) q^{a+1},
\end{aligned}$$

puis enfin, d'après **A.2.c.** : $\boxed{\mathbb{P}(\Delta = j) = \dfrac{p}{q^{a-j+1}} q^{a+1} = p\, q^j}$.

D.2.d. • Δ est une variable aléatoire à valeurs positives, et n'est pas quasi – certaine égale à 0, donc $\mathbb{E}(\Delta) > 0$ (l'existence de $\mathbb{E}(\Delta)$ est assurée, puisque Δ suit une loi discrète).

Par ailleurs, on a montré que $U'_1 = T'_1$ suit la même loi que toutes les variables aléatoires U_n, $\mathbb{E}(U'_1)$ existe donc, et l'on a $\mathbb{E}(U'_1) = \mathbb{E}(U_n)$.

Ainsi, l'inégalité $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(\Delta) + \mathbb{E}(U'_1) > \mathbb{E}(U_n)}$ est effectivement vérifiée.

• • $\mathbb{E}(\Delta)$ représente le temps moyen écoulé entre le passage du dernier bus dans l'intervalle $0, a$, et l'instant a (en convenant que ce temps écoulé vaut a si aucun bus n'est passé dans cet intervalle).

$\mathbb{E}(U'_1)$ est le temps d'attente moyen du premier bus arrivant dans l'intervalle $a, +\infty$.

$\mathbb{E}(\Delta) + \mathbb{E}(U'_1)$ représente donc la durée moyenne séparant l'arrivée du dernier bus passant dans l'intervalle $0, a$, de celle du premier bus passant dans l'intervalle $a, +\infty$.

$\mathbb{E}(U_n)$, quant à elle, représente l'attente moyenne entre le n – ième bus et le $(n+1)$ – ième ; l'inégalité $\mathbb{E}(\Delta) + \mathbb{E}(U'_1) > \mathbb{E}(U_n)$ signifie donc que l'intervalle de temps séparant le dernier bus de l'intervalle $0, a$ du premier bus de l'intervalle $a, +\infty$ est, en moyenne, plus grand que celui qui sépare n'importe quel bus du bus suivant... paradoxal, indeed...

E. Nombre d'usagers utilisant un bus donné

E.1.a. Si l'on suppose $(Z = n)$ réalisé, n personnes montent dans l'un des r bus présents à l'instant k.

Chacune d'entre elle choisit le premier bus avec une probabilité de $\frac{1}{r}$, et leurs choix sont indépendants.

Conditionnellement à $(Z = n)$, la variable aléatoire W_r représentant le nombre de personnes montant dans le premier bus suit donc la loi $\boxed{\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{r}\right)}$:

conditionnellement à $(Z = n)$, W_r est à valeurs dans $[\![0, n]\!]$, et pour tout $w \in [\![0, n]\!]$,

$$\boxed{\mathbb{P}\left(W_r = w \mid Z = n\right) = \binom{n}{w} \frac{1}{r^w} \left(\frac{r-1}{r}\right)^{n-w}}.$$

E.1.b. $\left((Z = n)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements tous non négligeables ; d'après la formule des probabilités totales, la série $\sum \mathbb{P}\left(W_r = w \mid Z = n\right) \mathbb{P}(Z = n)$ est donc convergente, et l'on a $\mathbb{P}\left(W_r = w\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(W_r = w \mid Z = n\right) \mathbb{P}(Z = n)$.

Lorsque $n < w$, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}\left(W_r = w \mid Z = n\right)$ est nulle (il ne peut pas monter dans le premier bus plus de personnes qu'il n'y a à l'arrêt), d'où l'égalité

$$\boxed{\mathbb{P}\left(W_r = w\right) = \sum_{n=w}^{+\infty} \mathbb{P}\left(W_r = w \mid Z = n\right) \mathbb{P}(Z = n)}.$$

E.1.c. La variable aléatoire W_r est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On déduit des deux questions précédentes, et du fait que Z suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$, que pour tout $w \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\left(W_r = w\right) = \sum_{n=w}^{+\infty} \binom{n}{w} \frac{1}{r^w} \left(\frac{r-1}{r}\right)^{n-w} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(W_r = w\right) &= \sum_{n=w}^{+\infty} \frac{n!}{w!\,(n-w)!} \frac{1}{r^w} \left(\frac{r-1}{r}\right)^{n-w} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda} \lambda^w}{w!\, r^w} \sum_{n=w}^{+\infty} \frac{1}{(n-w)!} \left(\frac{r-1}{r}\right)^{n-w} \lambda^{n-w} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda} \lambda^w}{w!\, r^w} \sum_{n=w}^{+\infty} \frac{1}{(n-w)!} \left(\lambda \frac{r-1}{r}\right)^{n-w} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda} \lambda^w}{w!\, r^w} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\left(\lambda \frac{r-1}{r}\right)^j}{j!}.
\end{aligned}$$

On reconnaît la somme d'une série exponentielle. On en déduit que $\mathbb{P}\left(W_r = w\right) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda} \lambda^w}{w!\, r^w} \mathrm{e}^{\lambda \frac{r-1}{r}}$, puis en arrangeant un peu : $\mathbb{P}\left(W_r = w\right) = \dfrac{e^{-\lambda\left(1 - \frac{r-1}{r}\right)}\left(\dfrac{\lambda}{r}\right)^w}{w\,!} = \dfrac{e^{-\frac{\lambda}{r}}\left(\dfrac{\lambda}{r}\right)^w}{w\,!}$: $\boxed{W_r \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\dfrac{\lambda}{r}\right)}$,

et l'on a achevé notre conditionnement Poisson/ binomial.

E.2. R_k est le nombre de bus passant à l'arrêt dans l'intervalle de temps k, k . On a admis en **D.1.d.** que ce nombre est représenté par une variable aléatoire suivant la même loi que N_0, et l'on a prouvé en **C.2.c.** que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $N_m \hookrightarrow \mathcal{B}^-\left(m + 1, q\right)$.

R_k suit donc la loi $\mathcal{B}^-\left(1, q\right)$, qui n'est autre que la loi $\boxed{\mathcal{G}_{\mathbb{N}}\left(q\right)}$.

E.3.a. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \mathbb{P}\left(Y = n \mid X = r\right)$.

- Les $\mathbb{P}\left(Y = n\right)$ sont évidemment tous positifs ou nuls.
- • L'application $\begin{pmatrix} \mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right) & \to & [0\,,1] \\ A & \mapsto & \mathbb{P}\left(A \mid X = r\right)\end{pmatrix}$ est une mesure de probabilités, et $\left(\left(Y = n\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$

est un système complet d'évènements. La série $\sum p_n = \sum \mathbb{P}\left(Y = n \mid X = r\right)$ est donc convergente, et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(Y = n \mid X = r\right) = 1$.

On sait alors qu'il existe une variable aléatoire Y_r, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\left(Y_r = n\right) = \mathbb{P}\left(Y = n \mid X = r\right)$.

E.3.b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \le n\,\mathbb{P}\left(Y_r = n\right) = n\,\frac{\mathbb{P}\left(\left(Y = n\right) \cap \left(Y = n\right)\right)}{\mathbb{P}\left(X = r\right)} \le \frac{1}{\mathbb{P}\left(X = r\right)}\,n\,\mathbb{P}\left(Y = n\right).$$

Comme Y possède une espérance, la série $\sum n\,\mathbb{P}\left(Y = n\right)$ converge, et ceci assure, d'après le théorème de convergence par majoration pour les séries de terme général positif, que $\sum n\,\mathbb{P}\left(Y_r = n\right)$ converge. La convergence étant évidemment absolue, $\boxed{Y_r \text{ possède une espérance}}$.

E.3.c. On a $\mathbb{E}\left(Y\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n\,.\,\mathbb{P}\left(Y = n\right)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après la formule des probabilités totales (licite car…) : $\mathbb{P}\left(Y = n\right) = \sum\limits_{r=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(Y = n \mid X = r\right).\mathbb{P}\left(X = r\right)$, donc

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^{+\infty} n\,\mathbb{P}(Y = n \mid X = r) . \mathbb{P}(X = r).$$

L'existence de $\mathbb{E}(Y)$, la positivité des $n\,\mathbb{P}(Y = n \mid X = r) . \mathbb{P}(X = r)$, et le théorème de Fubini, permettent d'en déduire que

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} n\,\mathbb{P}(Y = n \mid X = r) . \mathbb{P}(X = r).$$

On obtient alors

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{r=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} n\,\mathbb{P}(Y = n \mid X = r) \right) . \mathbb{P}(X = r) = \sum_{r=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} n\,\mathbb{P}(Y_r = n) \right) . \mathbb{P}(X = r),$$

d'où l'égalité $\boxed{\mathbb{E}(Y) = \sum_{r=0}^{+\infty} \mathbb{E}_{(X = r)}(Y) . \mathbb{P}(X = r)}$.

E.4.a. • Conditionnellement à $(Z = 0)$, W est certaine égale à 0 : $\mathbb{E}_{(Z = 0)}(W)$ existe, et elle est nulle.

• • Pour tout entier $r \geq 1$, la loi de W sachant $(R_k = r)$ est la loi de W_r, à savoir la loi de Poisson de paramètre $\dfrac{\lambda}{r}$. Il en résulte que $\mathbb{E}_{(Z = r)}(W)$ existe, et vaut $\dfrac{\lambda}{r}$.

• • • La série $\sum_{r \geq 1} \mathbb{E}_{(Z = r)}(W)\,\mathbb{P}(R_k = r) = \sum_{r \geq 1} \dfrac{\lambda}{r}\, q\, p^r$ converge, car son terme général est positif et majoré par celui de la série convergente $\sum_{r \geq 1} \dfrac{\lambda}{r}\, q\, p^r$.

Il résulte alors de **E.3.** que W possède une espérance, et que $\boxed{\mathbb{E}(W) = \sum_{r=1}^{+\infty} \dfrac{\lambda}{r} . p^r\, q}$.

E.4.b. • On a

$$\begin{aligned}
\int_0^p \frac{\mathrm{d}t}{1 - t} - \int_0^p \frac{t^K\,\mathrm{d}t}{1 - t} &= \int_0^p \frac{1 - t^K}{1 - t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^p \sum_{r=0}^{K-1} t^r\,\mathrm{d}t \quad \text{(somme géométrique...)} \\
&= \sum_{r=0}^{K-1} \int_0^p t^r\,\mathrm{d}t = \sum_{r=0}^{K-1} \frac{p^{r+1}}{r + 1},
\end{aligned}$$

d'où en changeant d'indice, $\boxed{\int_0^p \dfrac{\mathrm{d}t}{1 - t} - \int_0^p \dfrac{t^K\,\mathrm{d}t}{1 - t} = \sum_{r=1}^{K} \dfrac{p^r}{r}}$.

• • Pour tout $K \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \int_0^p \frac{t^K \, \mathrm{d}t}{1 - t} \leq \int_0^p \frac{t^K \, \mathrm{d}t}{1 - p} = \frac{p^{K+1}}{(1 - p)(K + 1)}$, donc par encadrement,

$\boxed{\lim_{K \to +\infty} \int_0^p \frac{t^K \, \mathrm{d}t}{1 - t} = 0}$.

• • • En passant à la limite lorsque K tend vers $+\infty$ dans l'égalité

$\sum_{r=1}^{K} \frac{p^r}{r} = \int_0^p \frac{\mathrm{d}t}{1 - t} - \int_0^p \frac{t^K \, \mathrm{d}t}{1 - t}$, on retrouve alors la convergence de la série $\sum_{r \geq 1} \frac{p^r}{r}$, et l'on

obtient : $\sum_{r=1}^{+\infty} \frac{p^r}{r} = \int_0^p \frac{\mathrm{d}t}{1 - t} = -\ln q$.

Finalement, $\boxed{\mathbb{E}(W) = \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{\lambda}{r} \,.\, p^r q = -\lambda \, q \ln q}$.

E.4.c. Ce nombre moyen, c'est $\mathbb{E}(W)$… une brève étude, sur $]0, 1[$, de la fonction $q \mapsto -\lambda \, q \ln q$,

permet de s'assurer qu'elle y admet un maximum, égal $\frac{\lambda}{\mathrm{e}}$ et atteint lorsque $q = \frac{1}{\mathrm{e}}$, donc lorsque

$p = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$. C Skonvoulé.

Fin