DS N°6

Corrigé de la version soft (CCP PC 2006)

PARTIE I

I.1. Avec $n = \dim(E)$, $\mathcal{B} = (u_1, \cdots, u_n)$ et en notant $x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i u_i$ on a $(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. Comme les matrices respectives de x et y dans la base $\mathcal{B}$ sont $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ on a, quitte à identifier un réel a avec la matrice (a) : $\boxed{(x|y) = {}^tXY = {}^tYX}$.

I.2. a) $\boxed{p(z) = \sum_{i=1}^{k} (z|e_i)e_i}$.

b) i) L'égalité précédente s'écrit matriciellement $M(p)Z = \sum_{i=1}^{k} {}^tE_i Z E_i$. Comme ${}^tE_i Z$ est un scalaire, elle s'écrit également $\boxed{M(p)Z = \sum_{i=1}^{k} E_i\, {}^tE_i Z}$.

b) ii) Soit f l'endomorphisme de F canoniquement associé à $M(p) - \sum_{i=1}^{k} E_i\, {}^tE_i$. L'égalité précédente montre que, pour tout $z \in E$, $f(z) = 0$, donc $f = 0$ et $\boxed{M(p) = \sum_{i=1}^{k} E_i\, {}^tE_i}$.

c) $||z||^2 = ||(z - p(z)) + p(z)||^2 = ||z - p(z)||^2 + ||p(z)||^2$ (Pythagore, car p est un projecteur orthogonal), d'où $\boxed{||p(z)|| \leqslant ||z||}$.

I.3. a) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à M. Il est clair que $M^2 = M$, donc f est un projecteur. La matrice de f dans la base canonique, qui est orthonormée pour le produit scalaire usuel, est symétrique, donc f est autoadjoint et $\boxed{f \text{ est un projecteur orthogonal}}$.

b) Soit (i, j, k, l) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Il est clair qu'une base du noyau est $(i + k, j + l)$ et une base de l'image $(i - k, j - l)$. Chacune de ces bases est orthogonale et en normant leurs vecteurs on trouve une base orthonormée du noyau : $\boxed{(\frac{\sqrt{2}}{2}(i + k), \frac{\sqrt{2}}{2}(j + l))}$ et une base orthonormée de l'image : $\boxed{(\frac{\sqrt{2}}{2}(i - k), \frac{\sqrt{2}}{2}(j - l))}$.

I.4. a) Par définition, $\lambda u = p(r(u))$. Comme $\lambda \neq 0$, $u = p(\frac{1}{\lambda} r(u))$ donc $\boxed{u \in H}$ (car H est l'image de p).
D'autre part, $p(r(u) - \lambda u) = p(r(u)) - \lambda p(u) = \lambda(u - p(u)) = 0$ (car u est élément de $H = \mathrm{Im}(p)$ et p est un projecteur, donc $p(u) = u$). Ainsi, $r(u) - \lambda u$ est élément du noyau de p, qui est l'orthogonal de son image H car p est un projecteur orthogonal : $\boxed{r(u) - \lambda u \in H^\perp}$.

b) D'après la question précédente, $(u|r(u) - \lambda u) = 0$ donc $(u|r(u)) = \lambda||u||^2$. r étant un projecteur orthogonal, il est symétrique et $(u|r(u)) = (u|r^2(u)) = (r(u)|r(u)) = ||r(u)||^2$ d'où $\boxed{\lambda||u^2|| = ||r(u)||^2}$.

c) D'après I.2.c., $||r(u)|| \leqslant ||u||$. Comme $||u|| \neq 0$, $\lambda = \frac{||r(u)||^2}{||u||^2} \in [0, 1]$. Ceci étant également vrai pour la valeur propre 0, $\boxed{\text{toutes les valeurs propres de } p \circ r \text{ sont éléments de } [0,1]}$.

I.5. a) $p \circ r$ est linéaire et, p et r commutant, $(p \circ r)^2 = p^2 \circ r^2 = p \circ r$: $p \circ r$ est donc un projecteur de F. De plus, pour tous x et y de F, $(p(r(x))|y) = (x|r(p(y))$, car p et r sont symétriques. Comme r et p commutent, $(p(r(x))|y) = (x|p(r(y))$ et $p \circ r$ est symétrique. Ainsi, $\boxed{p \circ r \text{ est un projecteur orthogonal}}$.

b) $p \circ r$ étant un projecteur son spectre est inclus dans $\{0, 1\}$. Comme $p \circ r \neq 0$, il contient 1. S'il ne contenait que 1, $p \circ r$ serait l'identité, ce qui contredit le fait que H, qui contient $\mathrm{Im}(p \circ r)$, est un sous-espace vectoriel strict de F donc $\boxed{Sp(p\circ r)=\{0,1\}}$.

c) Soit $x\in \mathrm{Ker}(p\circ r)$: $x=r(x)+(x-r(x))\in \mathrm{Ker}(p)+\mathrm{Ker}(r)$, car $r(x-r(x))=r(x)-r^2(x)=0$.
Soit $x\in \mathrm{Ker}(p)+\mathrm{Ker}(r)$: on peut écrire $x=y+z$ avec $p(y)=0$ et $r(z)=0$. Alors $p(r(x))=p(r(y))+p(r(z))=p(r(y))=r(p(y))=0$ (car p et r commutent).
Ainsi : $\boxed{\mathrm{Ker}(p\circ r)=\mathrm{Ker}(p)+\mathrm{Ker}(r)}$.
Soit $x\in \mathrm{Im}(p\circ r)$ et y tel que $p(r(y))=x$: on voit que $x\in\mathrm{Im}(p)$. p et r commutant, $x=r(p(y))\in\mathrm{Im}(r)$.
Soit $x\in\mathrm{Im}(p)\cap\mathrm{Im}(r)$. Soient y et z tels que $x=p(y)=r(z)$. Alors $x=p(y)=p(p(y))=p(r(z))\in\mathrm{Im}(p\circ r)$.
Ainsi : $\boxed{\mathrm{Im}(p\circ r)=\mathrm{Im}(p)\cap\mathrm{Im}(r)}$.

I.6. a) $R^2=R$; en calculant ce carré par bloc on obtient $R^2=\begin{pmatrix} A^2+BC & AB+BD\\ CA+DC & CB+D^2\end{pmatrix}$. On en déduit $\boxed{A^2+BC=A,\ AB+BD=B \text{ et } CB+D^2=D}$. Enfin, R étant la matrice d'un projecteur orthogonal dans une base orthonormée, elle est symétrique, d'où $\boxed{{}^tA=A,\ {}^tB=C \text{ et } {}^tD=D}$.

b) En calculant les produits par bloc : $PR=\begin{pmatrix} A & B\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ et $RP=\begin{pmatrix} A & 0\\ C & 0\end{pmatrix}$.
i) $\Rightarrow$ *ii)* : Les valeurs propres de PR sont 0 et celles de A ; le spectre de A est donc inclus dans $\{0,1\}$. De plus, A est symétrique réelle donc diagonalisable. Si X est un vecteur propre de A et λ la valeur propre associée on tire de $A^2+BC=A$ l'égalité $\lambda^2X+BCX=\lambda X=\lambda^2X$ (car $\lambda=0$ ou 1), d'où $BCX=0$. $M_k(\mathbb{R})$ possédant une base de vecteurs propres de A on en déduit $BC=0$, i.e. ${}^tCC=0$.
ii) $\Rightarrow$ *iii)* : la trace de ${}^tCC$ est la somme des carrés des coefficients de C, qui sont des réels positifs. Cette somme étant nulle, tous les termes sont nuls et $C=0$.
iii) $\Rightarrow$ *iv)* : Si $C=0$, $B={}^tC=0$ et le calcul ci-dessus montre que $PR=RP$, donc p et r commutent.
iv) $\Rightarrow$ *i)* : Si $p\circ r=0$, c'est clair, sinon voir I.5.b.

PARTIE II

II.1. Soit w le projeté orthogonal de v sur l'image de f et $x_0\in E$ tel que $f(x_0)=w$. On a, pour tout x de E : $||f(x)-v||^2=||(f(x)-f(x_0))+(f(x_0)-v)||^2$. Or $f(x)-f(x_0)\in\mathrm{Im}(f)$ et $f(x_0)-v=w-v\in(\mathrm{Im}(f))^{\perp}$ donc, d'après le théorème de Pythagore : $||f(x)-v||^2=||f(x)-f(x_0)||^2+||f(x_0)-v||^2\geqslant||f(x_0)-v||^2$, d'où le résultat demandé.

II.2. Si x_1 est une autre pseudo-solution de $(*)$ on obtient, en prenant $x=x_1$ dans ce qui précède, $||f(x_1)-f(x_0)||=0$, donc $x_1=x_0$ puisque f est injective.

II.3. D'après la question précédente, toutes les pseudo-solutions ont même image par f. Si x_0 est une pseudo-solution de $(*)$, $f(x_0)$ est donc le projeté orthogonal de v sur l'image de f. $f(x_0)-v$ est donc orthogonal à l'image de f et, pour tout $x\in E$, $(f(x)|f(x_0)-v)=0$.
Si, pour tout $x\in E$, $(f(x)|f(x_0)-v)=0$: on a vu plus haut que $(f(x_0)-f(x)|f(x_0)-v)=0$, donc $||f(x_0)-v||^2=(f(x_0)-f(x)+f(x)-v|f(x_0)-v)=(f(x)-v|f(x_0)-v)\leqslant||f(x)-v||\,||f(x_0)-v||$ (inégalité de Cauchy-Schwarz). Si $f(x_0)\neq v$, on obtient l'inégalité définissant les pseudo-solutions ; si $f(x_0)=v$, x_0 est évidemment pseudo-solution.

II.4. L'équation s'écrit matriciellement : pour toute matrice colonne X à $\dim(E)$ lignes, ${}^t(AX)(AX_0-V)=0$, soit ${}^tX\,{}^tAAX_0={}^tX\,{}^tAV$. En prenant pour X les matrices des vecteurs de la base canonique de E, on obtient l'égalité des lignes de ${}^tAAX_0$ et ${}^tAV$. Ainsi, si x_0 est pseudo-solution de $(*)$, ${}^tAAX_0={}^tAV$.
Réciproquement, si on a cette égalité, il suffit de multiplier à gauche par ${}^tX$ (avec X quelconque) pour obtenir l'équation de II.3., ce qui entraîne que x_0 est pseudo-solution de $(*)$.
On a donc : $\boxed{x_0 \text{ est pseudo-solution de } (*) \iff {}^tAAX_0={}^tAV}$.

II.5. En notant $X=\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ et on obtient le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3a-3c & = & 2\\ 6b & = & 3\\ -3a+3c & = & 0\end{array}\right.$$

donc $\boxed{\text{les triplets } (a,b,c) \text{ convenant sont ceux de la forme } (a, \frac{1}{2}, a), a \in \mathbb{R}}$.

II.6. a) En posant $f(\lambda,\mu) = \lambda a + \mu b$ le problème est de minimiser $||f(\lambda,\mu) - c||^2$, soit encore à déterminer les pseudo-solutions de $f(\lambda,\mu) = c$ car f est linéaire et la fonction racine carrée est strictement croissante.

Plus précisément, $\boxed{v = c}$ et $\boxed{\text{la matrice de } f \text{ dans les bases canoniques est } A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix}}$.

b) D'après le théorème du rang f est injective si, et seulement si, elle est de rang 2, i.e. $\boxed{a \text{ et } b \text{ ne sont pas colinéaires}}$.

c) L'équation matricielle de II.4. devient :

$$\begin{pmatrix} ||a||^2 & (a|b) \\ (a|b) & ||b||^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a|c) \\ (b|c) \end{pmatrix}.$$

Ce système étant de Cramer (car (a,b) est libre) on en déduit : $\boxed{\begin{cases} \lambda = \dfrac{||b||^2(a|c) - (a|b)(b|c)}{||a||^2||b||^2 - (a|b)^2} \\ \mu = \dfrac{||a||^2(b|c) - (a|b)(a|c)}{||a||^2||b||^2 - (a|b)^2} \end{cases}}$

PARTIE III

III.1. a) Soit z le projeté orthogonal de y sur l'image de f, $y' = y - z \in (\mathrm{Im}(f))^\perp$ et $u \in E$ tel que $f(u) = z$. Comme le noyau de f et son orthogonal sont supplémentaires dans E il existe x' et x, respectivement dans le noyau de f et son orthogonal, tels que $u = x + x'$. Alors $f(u) = f(x)$ et $\boxed{y = f(x) + y' \text{ avec } (x,y') \in (\mathrm{Ker}(f))^\perp \times (\mathrm{Im}(f))^\perp}$.

b) Soient (x_1, y_1') et (x_2, y_2') convenant. Alors $f(x_1) + y_1' = f(x_2) + y_2'$, donc $f(x_1 - x_2) = y_2' - y_1' \in (\mathrm{Im}(f))^\perp$. Comme $f(x_1 - x_2) \in \mathrm{Im}(f)$, on a $y_1' = y_2'$ et $f(x_1 - x_2) = 0$, donc $x_1 - x_2 \in \mathrm{Ker}(f)$. Comme $x_1 - x_2 \in (\mathrm{Ker}(f))^\perp$, $x_1 - x_2 = 0$.

c) Soient x et y dans F et a et b dans $\mathbb{R}$. On a $x = f(g(x)) + x'$ et $y = f(g(y)) + y'$, d'où $ax + by = f(ag(x) + bg(y)) + ax' + by'$. Comme $ag(x) + bg(y) \in (\mathrm{Ker}(f))^\perp$ et $ax' + by' \in (\mathrm{Im}(f))^\perp$, $g(ax+by) = ag(x) + bg(y)$ donc $\boxed{g \text{ est linéaire}}$.

III.2. Soit $x \in \mathrm{Ker}(g)$: $x = f(g(x)) + x' = x' \in \mathrm{Im}(f)^\perp$.
Soit $x \in (\mathrm{Im}(f))^\perp$: $x = f(g(x)) + x'$ avec $x' \in (\mathrm{Im}(f))^\perp$, mais on a également $x = f(0) + x$ avec $(0, x) \in (\mathrm{Ker}(f))^\perp \times (\mathrm{Im}(f))^\perp$. D'après l'unicité de cette écriture, $g(x) = 0$ et $x \in \mathrm{Ker}(g)$. Ainsi, $\boxed{\mathrm{Ker}(g) = (\mathrm{Im}(f))^\perp}$.
Par définition, $\mathrm{Im}(g) \subset (\mathrm{Ker}(f))^\perp$. D'autre part, $\dim(\mathrm{Im}(g)) = \dim(F) - \dim(\mathrm{Ker}(g)) = \dim(F) - \dim((\mathrm{Im}(f))^\perp) = \dim(F) - \dim(E) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(F) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim((\mathrm{Ker}(f))^\perp)$, d'où $\boxed{\mathrm{Im}(g) = (\mathrm{Ker}(f))^\perp}$.

III.3. a) Par définition, pour tout $x \in E$, $f(x) = f(g(f(x))) + f(x)'$, avec $f(x)' \in (\mathrm{Im}(f))^\perp$. Comme $f(x)' = f(x) - f(g(f(x))) \in \mathrm{Im}(f)$, $f(x)' = 0$ et $f(x) = f(g(f(x)))$. On a donc $f = f \circ g \circ f$ et $g \circ f = (g \circ f)^2$ donc $g \circ f$ est un projecteur de E.
De plus, $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$. Pour $x \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$, $f(x) \in \mathrm{Ker}(g) = (\mathrm{Im}(f))^\perp$; comme $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$, on a donc $f(x) = 0$ et $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$.
De même, $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g) = (\mathrm{Ker}(f))^\perp$. Or $\dim(\mathrm{Im}(g \circ f)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(g \circ f)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim((\mathrm{Ker}(f))^\perp)$, donc $\mathrm{Im}(g \circ f) = (\mathrm{Ker}(f))^\perp$.
Ceci montre que $\boxed{g \circ f \text{ est le projecteur orthogonal de } E \text{ sur } (\mathrm{Ker}(f))^\perp}$.

b) Pour tout $x \in F$ on a par définition $f(g(x)) = f(g(f(g(x)))) + f(g(x))'$, avec $f(g(x))' \in (\mathrm{Im}(f))^\perp$. Le même raisonnement que ci-dessus montre que ce vecteur est nul, d'où $f \circ g = (f \circ g)^2$: $f \circ g$ est donc un projecteur de F.
De plus, $(\mathrm{Im}(f))^\perp = \mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(f \circ g)$ et $\mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Im}(f)$. Un raisonnement analogue à celui qui précède montre que ce sont des égalités et que $\boxed{f \circ g \text{ est le projecteur orthogonal de } F \text{ sur } \mathrm{Im}(f)}$.

III.4. Soit B la matrice de g dans les bases canoniques. f étant surjective, $(\mathrm{Im}(f))^\perp = 0$, donc, pour tout $y \in F$, $y = f(g(y))$. On a donc $AB = I_2$. Ceci impose que B soit de la forme $\begin{pmatrix} a & d \\ 1-a & -d \\ a-1 & d+1 \end{pmatrix}$. Le noyau de f étant engendré par $(1,-1,1)$ et l'image de g étant son orthogonal, les vecteurs $(a, 1-a, a-1)$ et $(d, -d, d+1)$ sont orthogonaux à $(1,-1,1)$, ce qui impose $a = \dfrac{2}{3}$ et $d = -\dfrac{1}{3}$ soit : $\boxed{B = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$.

III.5. a) Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$ et $y \in \mathrm{Im}(f)$. Soit $z \in E$ tel que $y = f(z)$. Alors $(x|y) = (x|f(z)) = (f(x)|z) = (0|z) = 0$ donc $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(f)^\perp$. Comme $\dim((\mathrm{Im}(f))^\perp) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f))$ on a $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = (\mathrm{Im}(f))^\perp}$.
On en déduit $(\mathrm{Ker}(f))^\perp = ((\mathrm{Im}(f))^\perp)^\perp$. E étant de dimension finie, $((\mathrm{Im}(f))^\perp)^\perp = \mathrm{Im}(f)$ et $\boxed{\mathrm{Im}(f) = (\mathrm{Ker}(f))^\perp}$.

b) Soit u un vecteur propre de f et a la valeur propre associée, supposée non nulle ; alors $f(u) = au$. En particulier, $u = f(\frac{1}{a}u) \in \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f\circ g - Id)$. On a donc $f(g(u)) = u = f(\frac{1}{a}u)$ et $f(\frac{1}{a}u - g(u)) = 0$. Ainsi, $\frac{1}{a}u - g(u) \in \mathrm{Ker}(f) = (\mathrm{Im}(f))^\perp$. D'autre part, $g(u) \in \mathrm{Im}(g) = (\mathrm{Ker}(f))^\perp = \mathrm{Im}(f)$ et $u \in \mathrm{Im}(f)$ donc $\frac{1}{a}u - g(u) \in \mathrm{Im}(f)$.
On a donc $g(u) = \frac{1}{a}u$ et $\boxed{\text{tout vecteur propre de } f \text{ associé à une valeur propre non nulle est vecteur propre de } g}$ (associé à la valeur propre inverse).
D'autre part, $\mathrm{Ker}(f) = (\mathrm{Im}(f))^\perp = \mathrm{Ker}(g)$ donc :
$\boxed{\text{les sous-espaces propres de } f \text{ et } g \text{ associés à la valeur propre 0 sont égaux}}$.

c) f étant symétrique, E possède une base orthonormée de vecteurs propres de f. Comme ce sont aussi des vecteurs propres de g, g est diagonalisable en base orthonormée donc $\boxed{g \text{ est symétrique}}$.

III.6. D'après la question précédente il suffit de diagonaliser A avec des matrices de passage orthogonales : en changeant les valeurs propres non nulles en leurs inverses on obtiendra la matrice B cherchée.
Le polynôme caractéristique de A est $X^3 - 9X^2 + 18X$, les valeurs propres de A sont donc 0, 3 et 6. On trouve alors, avec $P = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in O_3(\mathbb{R})$: $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(0,3,6)$, d'où $B = P\,\mathrm{diag}(0, 1/3, 1/6)\,P^{-1}$ soit :
$\boxed{B = \dfrac{1}{18}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}}$.

⋆ ⋆ ⋆

DS N°6

Corrigé de la version hard (Centrale PC 2020)

Partie I

Q 1. La règle de produit par blocs donne : $J_n^2 = \begin{pmatrix} O & I_n \\ -I_n & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & I_n \\ -I_n & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_n & O \\ O & -I_n \end{pmatrix} = -I_{2n}$.
Ensuite ${}^tJ_{2n} = -J_{2n}$ donc J_n est antisymétrique et enfin $J_n^T\ J_n\ J_n = -J_n.J_n^2 = J_n$ donc J_n est symplectique.
Finalement $J_n \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R})$.

Q 2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a $\det M = ad - bc$ et

$$\begin{aligned} M^T\ J_1\ M &= J_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & ad-bc \\ bc-ad & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \det M = 1 \end{aligned}$$

Q 3. Si $M \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$. On sait que $\det M = \pm 1$. La question **Q2** donne alors que M est symplectique si et seulement si M est une matrice de rotation $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, avec $a^2 + b^2 = 1$. Par ailleurs, le calcul $J_1\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ montre que : M est symplectique $\Longleftrightarrow M_2 = -J_1 M_1$.

Q 4. Soit $X_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que $X_1^T\ X_1 = a^2 + b^2 = 1$ (norme au carré égale à 1). On a $J_1 X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ et donc $M = (X_1 | -J_1 X_1) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ et de plus on a par construction "$M_2 = -J_1 M_1$", donc $M \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$ (on peut aussi dire que $\det M = 1$ et invoquer **Q2**.

Q 5. Soit $M \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$. Le théorème spectral donne que M est diagonalisable et si λ, μ sont ses valeurs propres distinctes ou confondues on a $\lambda\mu = \det M = 1$ donc les valeurs propres de M sont inverses l'une de l'autre. Soit X_1 un vecteur propre **unitaire** attaché à la valeur propre λ de M. Posons $X_2 = -J_1 X_1$. Comme M est symétrique et symplectique il vient $M J_1 M = J_1$ et en multipliant cette relation à droite par $-X_1$: $\lambda M(-J_1 X_1) = -J_1 X_1$, soit $M X_2 = \frac{1}{\lambda} X_2$ donc X_2 est un vecteur propre attaché à la valeur propre $\frac{1}{\lambda}$, qui est éventuellement égale à λ. Cependant, d'après **Q4** la matrice $P = (X_1 | X_2)$ est orthogonale et symplectique, donc inversible et ainsi (X_1, X_2) est une base de vecteurs propres qui donne

$$P^{-1} M P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad P \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$$

Q 6. Une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de la forme $M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice est symplectique si et seulement si $\det M = 1$, soit $a = \pm 1$. Ainsi $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_2(\mathbb{R}) = \{J_1, -J_1\}$ et ces deux matrices ne sont pas diagonalisables puisque $\chi_{J_1} = \chi_{-J_1} = X^2 + 1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

Partie II

Remarquons que : $\quad \forall X, Y \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R}) \quad \varphi(X, Y) = X^T\ J_n Y = \langle X, J_n Y \rangle = -\langle J_n X, Y \rangle$

Q 7. Clair, par linéarité de la transposition.

Q 8. La matrice K étant antisymétrique on a $\varphi(X, X) = 0$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, puisque :

$$\varphi(X, X) = \varphi(X, X)^T = X^T\ K^T\ X = -X^T\ K\ X = -\varphi(X, X)$$

De même (ou en conséquence) φ est antisymétrique :

$$\varphi(X, Y) = \left(X^T\ J_n Y\right)^T = Y^T\ J_n^T X = -Y^T\ J_n X = -\varphi(Y, X)$$

Q 9. En notant $X_1 = (x_1, \cdots, x_n)^T$, $X_2 = (x_{n+1}, \cdots, x_{2n})^T$ et $Y_1 = (y_1, \cdots, y_n)^T$, $Y_2 = (y_{n+1}, \cdots, y_{2n})^T$ on a :

$$\begin{aligned}\varphi(X,Y) &= \left(X_1^T \mid X_2^T\right)\begin{pmatrix} O & I_n \\ -I_n & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2\end{pmatrix} = \left(X_1^T \mid X_2^T\right)\begin{pmatrix} Y_2 \\ -Y_1\end{pmatrix} = X_1^TY_2 - X_2^TY_1 \\ &= \sum_{k=1}^{n}(x_ky_{k+n} - x_{k+n}y_k)\end{aligned}$$

Q 10. Calculons $\varphi(e_i, e_j)$ pour $(i,j) \in \{1, \cdots, 2n\}^2$ avec la formule précédente appliquée à "x" $= e_i$ et "y" $= e_j$.

⇝ Cas où $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Il vient $x_{k+n} = y_{k+n} = 0$ pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$ car la composante d'indice $k+n (> n)$ de e_i (ou e_j) est nulle. Ainsi $\varphi(e_i, e_j) = 0$ et $\delta_{i+n,j} - \delta_{i,j+n} = 0 - 0 = 0$. La formule est donc bonne dans ce cas.

⇝ Cas où $n+1 \leqslant i, j \leqslant 2n$. Il vient $x_k = y_k = 0$ pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$ car la composante d'indice $k (\leqslant n)$ de e_i (ou e_j) est nulle. Ainsi $\varphi(e_i, e_j) = 0$ et $\delta_{i+n,j} = 0$ car $j \leqslant 2n < i+n$ et symétriquement $\delta_{i,j+n} = 0$ donc la formule est encore bonne dans ce cas.

⇝ Cas où $1 \leqslant i \leqslant n$ et $n+1 \leqslant j \leqslant 2n$. On a $x_{k+n} = y_k = 0$ si $k \leqslant n$ et la formule est encore bonne puisque

$$\varphi(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^{n}(x_ky_{k+n} - x_{k+n}y_k) = \sum_{k=1}^{n} x_ky_{k+n} = \sum_{k=1}^{n}\delta_{k,i}\delta_{k+n,j} = \delta_{i+n,j} = \delta_{i+n,j} - \underbrace{\delta_{i,j+n}}_{0}$$

⇝ Cas où $n+1 \leqslant i \leqslant 2n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$. On a cette fois :

$$\varphi(e_i, e_j) = -\sum_{k=1}^{n} x_{k+n}y_k = -\sum_{k=1}^{n}\delta_{k+n,i}\,\delta_{k,j} = -\delta_{j+n,i} = \underbrace{\delta_{i+n,j}}_{0} - \delta_{j+n,i}$$

Q 11. Soit $X \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$.

Avec les notations introduites en **Q9**, $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2\end{pmatrix}$, on avait trouvé $J_nX = \begin{pmatrix} X_2 \\ -X_1\end{pmatrix}$, donc

$$\langle X, J_nX\rangle = X^T\ (J_nX) = \left(X_1^T \mid X_2^T\right)\begin{pmatrix} X_2 \\ -X_1\end{pmatrix} = X_1^TX_2 - X_2^TX_1 = \langle X_1, X_2\rangle - \langle X_2, X_1\rangle = 0$$

D'un autre côté : $\varphi(J_nX, X) = (J_nX)^T J_nX = X^T\ J_n^T\ J_nX = X^TX = \|X\|^2$, puisque $J_n^T\ J_n = -J_n^2 = I_{2n}$.

Q 12. Soient $X, Y \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$. Puisque $\varphi(X,Y) = -\varphi(Y,X)$ on a :

$$Y \in X^{J_n} \overset{déf}{\Longleftrightarrow} \varphi(Y,X) = 0 \Longleftrightarrow Y^T\ J_nX = 0 \Longleftrightarrow \langle Y, J_nX\rangle = 0 \Longleftrightarrow Y \in (J_nX)^{\perp}$$

Q 13. Soit $P = (X_1 \mid \cdots \mid X_{2n}) \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{O}_{2n}(\mathbb{R})$. Les colonnes de P forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^{2n}$ pour le produit scalaire canonique : $\forall (i,j) \in \{1, \cdots, 2n\}^2$ $\langle X_i, X_j\rangle = \delta_{i,j}$. On a donc les 2 premières conditions, et pour la troisième on utilise que $X_i = Pe_i$ et **Q10** :

$$\varphi(X_i, X_j) = (Pe_i)^T J_n(Pe_j) = e_i^T\ \underbrace{P^TJ_nP}_{J_n}\ e_j = e_i^T\ J_n\ e_j = \varphi(e_i, e_j) \overset{\textbf{Q10}}{=} \delta_{i+n,j} - \delta_{i,j+n}$$

Q 14 . Soit $i \in \{1, \cdots, n\}$. Pour $j \in \{1, \cdots, 2n\} \setminus \{i+n\}$ on a d'après la formule précédente

$$\varphi(X_i, X_j) = 0 - \delta_{i,j+n} = 0 \text{ car } i \leqslant n < j+n$$

donc, $(X_1, \cdots, X_{2n})$ étant une base orthonormée de $\mathbb{R}^{2n}$ il vient $X_{i+n}^{\perp} = vect(X_j, j \neq i+n) \subset X_i^{J_n}$ et égalité puisque $X_i^{J_n}$, noyau de la forme linéaire non nulle $Y \longmapsto \varphi(X_i, Y)$ est de dimension $n-1$, comme $X_{i+n}^{\perp}$. On a donc bien :

$$X_i^{J_n} = X_{i+n}^{\perp}$$

Q 15. Puisque P est orthogonale ($P^T = P^{-1}$), le caractère symplectique de P donne : $J_nP = PJ_n$, soit

$$J_n(X_1|\ \cdots|X_n|X_{n+1}\cdots|X_{2n}) = (X_1\ \cdots X_n|X_{n+1}\cdots X_{2n})\begin{pmatrix} O & I_n \\ -I_n & O\end{pmatrix}$$

et la règle de produit par blocs (différents dans les deux membres) donne :

$$(J_nX_1|\ \cdots|J_nX_n|\cdots|J_nX_{2n}) = (-X_{n+1}\cdots - X_{2n}|X_1\cdots X_n)$$

soit : $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$ $\quad J_nX_i = -X_{i+n}$ $\quad$ et $\quad J_nX_{i+n} = X_i$. CQFD.

Remarque : ce calcul permet de retrouver **Q14** . En effet pour $i \in \{1, \cdots, n\}$ la question **Q12** donne $X_i^{J_n} = (J_nX_i)^{\perp} = (-X_{i+n})^{\perp} = X_{i+n}^{\perp}$.

Partie III

Q 16. En échangeant les colonnes i et $i+n$ (pour $i = 1, 2, \cdots, n$) dans J_n on a

$$\det J_n = \begin{vmatrix} O & I_n \\ -I_n & O \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} I_n & O \\ O & -I_n \end{vmatrix} = 1$$

et alors si $M^T J_n M = J_n$ il vient $\det(M^T) \det J_n \det M = \det J_n$ donc $(\det M)^2 = 1$ et :

$$\forall M \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \quad \det M = \pm 1$$

Q 17. $M \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ est donc inversible et en multipliant la relation à gauche par $\left(M^T\right)^{-1} = \left(M^{-1}\right)^T$ et à droite par M^{-1} il vient que M^{-1} est symplectique : $J_n = \left(M^{-1}\right)^T J_n M^{-1}$.

Q 18. Supposons que $M^T J_n M = J_n$ et $N^T J_n N = J_n$. En injectant la première relation dans la deuxième on a : $N^T \left(M^T J_n M\right) N = J_n$, soit $(MN)^T J_n (MN) = J_n$ et donc MN est encore symplectique. L'ensemble $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ pour la simple raison que $O \notin \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$.

Remarque : $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ a tous les défauts puisqu'il n'est pas stable par le produit externe ($(\lambda M)^T J_n (\lambda M) = \lambda^2 M^T J_n M = \lambda^2 J_n$) ni par addition (par exemple J_n et $-J_n$ appartiennent à $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ mais pas leur somme O)

Partie IV

IV A : **Propriété.** Soit $M \in \mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$. D'après **Q16** la matrice M n'a pas la valeur propre 0.

Q 19 . On généralise ce qu'on a fait en **Q5.** Soit X un vecteur propre attaché à la valeur propre λ de M. Posons $Y = J_n X$. Le vecteur Y est non nul car X est non nul et J_n inversible. Comme M est symétrique et symplectique il vient $M J_n M = J_n$ et en multipliant cette relation à droite par X : $\lambda M (J_n X) = J_n X$, soit $MY = \frac{1}{\lambda} Y$ donc Y (non nul) est un vecteur propre de M attaché à la valeur propre $\frac{1}{\lambda}$, qui est éventuellement égale à λ.

Q 20 . Soit $\lambda \in sp_{\mathbb{R}}(M)$ et $(X_1, \cdots, X_p)$ une base de E_λ. Comme J_n est inversible, la famille $(J_n X_1, \cdots, J_n X_p)$ est libre (puisque l'endomorphisme canoniquement associé est injectif) et la question précédente donne que c'est une famille libre de vecteurs de $E_{1/\lambda}$. Il s'ensuit que $p = \dim E_\lambda \leqslant \dim E_{1/\lambda}$. Cette majoration appliquée à la valeur propre $1/\lambda$ donne $\dim E_{1/\lambda} \leqslant \dim E_\lambda$ et donc finalement $\dim E_{1/\lambda} = \dim E_\lambda$. En conséquence $(J_n X_1, \cdots, J_n X_p)$ est une *base* de $E_{1/\lambda}$.

Q 21 . Rappelons la remarque faite en début de **Partie II** : $\forall X, Y \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R}) \quad \langle X, J_n Y \rangle = -\langle J_n X, Y \rangle$.

Supposons ensuite que $Y \in vect\,(Y_1, \cdots, Y_p, J_n Y_1, \cdots, J_n Y_p)^\perp$. Il vient :

$$\forall i \in \{1, \cdots, p\} \quad \langle J_n Y, Y_i \rangle = -\langle Y, J_n Y_i \rangle = 0 \text{ et } \langle J_n Y, J_n Y_i \rangle = -\left\langle Y, J_n^2 Y_i \right\rangle = \langle Y, Y_i \rangle = 0$$

On a donc montré que le sous-espace $vect\,(Y_1, \cdots, Y_p, J_n Y_1, \cdots, J_n Y_p)^\perp$ est stable par J_n.

Q 22 . On suppose que 1 est valeur propre de M.

• *Première étape :* Soit X_1 un vecteur propre **unitaire** attaché à la valeur propre 1. D'après **Q19** $J_n X_1$ est un vecteur propre **unitaire** (car J_n est orthogonale) attaché à la valeur propre $1/1 = 1$ et d'après **Q11** $J_n X_1$ est orthogonal à X_1. Ainsi $(X_1, J_n X_1)$ est une famille orthonormée de E_1 , qui est donc de dimension $\geqslant 2$.

• *Deuxième étape :* Si $\dim E_1 = 2$ c'est fini. Si $\dim E_1 \geqslant 3$, comme $\dim vect\,(X_1, J_n X_1)^\perp = 2n - 2$ on a $E_1 \cap vect\,(X_1, J_n X_1)^\perp \neq \{0\}$ et on peut choisir X_2 **unitaire** dans $E_1 \cap vect\,(X_1, J_n X_1)^\perp$. Comme pour X_1 on a $J_n X_2 \in E_1$ et $J_n X_2$ est orthogonal à X_2. De plus la question **Q21** donne que $J_n X_2 \in vect\,(X_1, J_n X_1)^\perp$ donc $(X_2, J_n X_2)$ est une famille orthonormée de $vect\,(X_1, J_n X_1)^\perp$. Comme de plus $\mathbb{R}^{2n} = vect\,(X_1, J_n X_1) \oplus vect\,(X_1, J_n X_1)^\perp$, la famille $(X_1, J_n X_1, X_2, J_n X_2)$ est une famille orthonormée de E_1.
• *Etapes suivantes :* on peut contruire ainsi (à l'aide de **Q21**) par récurrence sur $k \leqslant \left\lfloor \frac{1}{2} \dim E_1 \right\rfloor$, une famille orthonormée de E_1 : $(X_1, \cdots, X_k, J_n X_1, \cdots, J_n X_k)$. Si $\dim E_1$ était impaire, $\dim E_1 = 2p+1$, on aboutirait à une famille orthonormée de E_1 : $(X_1, \cdots, X_p, J_n X_1, \cdots, J_n X_p)$ et à une contradiction car en prenant Y **unitaire** dans $E_1 \cap vect\,(X_1, \cdots, X_p, J_n X_1, \cdots, J_n X_p)$, la famille $(X_1, \cdots, X_p, Y, J_n X_1, \cdots, J_n X_p, J_n Y)$ serait encore libre et dans E_1. Or cette famille a $2p+2$ vecteurs et $\dim E_1 = 2p+1$! CQFD.

Q 23 . Comme $1/(-1) = -1$ on a exactement le même résultat pour E_{-1}.

Q 24 . Tout d'abord, le théorème spectral donne que la matrice symétrique réelle M est orthodiagonalisable. Il s'agit ici d' "améliorer" la réduction.

Traitons le cas le plus long où $\{-1, 1\} \subsetneq sp_{\mathbb{R}}(M)$, les autres cas étant analogues. D'après **Q19** le spectre de M s'écrit $sp_{\mathbb{R}}(M) = \left\{-1, 1, \lambda_1, \cdots, \lambda_r, \frac{1}{\lambda_1}, \cdots, \frac{1}{\lambda_r}\right\}$ et on a déjà :

$$(*) \qquad \mathbb{R}^{2n} = E_1 \overset{\perp}{\oplus} E_{-1} \overset{\perp}{\oplus} E_{\lambda_1} \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} E_{\lambda_r} \overset{\perp}{\oplus} E_{1/\lambda_1} \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} E_{1/\lambda_r}$$

$\leadsto$ D'après **Q22** il existe une base orthonormée de E_1 de la forme $(X_1, \cdots, X_p, J_nX_1, \cdots, J_nX_p)$ et d'après **Q23** il existe une base orthonormée de E_{-1} de la forme $(Y_1, \cdots, Y_q, J_nY_1, \cdots, J_nY_q)$ (où $\dim E_1 = 2p$, $\dim E_{-1} = 2q$) et d'après **Q20** si $\left(X_1^{(i)}, \cdots, X_{n_i}^{(i)}\right)$ est une base de E_{λ_i} alors $\left(J_nX_1^{(i)}, \cdots, J_nX_{n_i}^{(i)}\right)$ est une base de E_{1/λ_i}. Donc par $(*)$ la famille

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_0 &= (X_1, \cdots, X_p, J_nX_1, \cdots, J_nX_p, Y_1, \cdots, Y_q, J_nY_1, \cdots, J_nY_q, X_1^{(1)}, \cdots, X_{n_1}^{(1)}, J_nX_1^{(1)}, \cdots, J_nX_{n_1}^{(1)},\\ &\quad \cdots\cdots, X_1^{(r)}, \cdots, X_{n_r}^{(r)}, J_nX_1^{(r)}, \cdots, J_nX_{n_r}^{(r)})\end{aligned}$$

est une base orthonormée de $\mathbb{R}^{2n}$ et on a en particulier (après simplification par 2) :

$$n = p + q + n_1 + \cdots + n_r$$

Il suffit alors de ranger correctement tous ces vecteurs comme suit pour avoir une diagonale comme souhaité :

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_1 &= (X_1, \cdots, X_p, Y_1, \cdots, Y_q, X_1^{(1)}, \cdots, X_{n_1}^{(1)}, \cdots, X_1^{(r)}, \cdots X_{n_r}^{(r)}\\ &\quad \cdots, J_nX_1, \cdots, J_nX_p, J_nY_1, \cdots, J_nY_q, J_nX_1^{(1)}, \cdots, J_nX_{n_1}^{(1)}, \cdots, J_nX_1^{(r)}, \cdots, J_nX_{n_r}^{(r)})\end{aligned}$$

B_1 est une base orthonormée de $\mathbb{R}^{2n}$ de vecteurs propres pour M et si P_1 est la matrice de passage (orthogonale) de la base canonique $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{B}_1$ alors :

$$D := P_1^{-1}AP_1 = P_1^TAP_1 = BlocDiag\left(I_p, I_q, \lambda_1 I_{n_1}, \cdots, \lambda_r I_{n_r}, I_p, I_q, \tfrac{1}{\lambda_1}I_{n_1}, \cdots, \tfrac{1}{\lambda_r}I_{n_r}\right)$$

Cette matrice diagonale D vérifie bien : $\forall k \in \{1, \cdots, n\}$ $d_{k+n} = 1/d_k$.

$\leadsto$ Enfin , compte tenu des questions **Q13-14-15,** si on veut une matrice de passage orthogonale et symplectique P_2 il **faudra** faire en sorte que "$X_{i+n} = -J_nX_i$". Pour cela prenons les opposés de n derniers vecteurs propres

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_2 &= (X_1, \cdots, X_p, Y_1, \cdots, Y_q, X_1^{(1)}, \cdots, X_{n_1}^{(1)}, \cdots, X_1^{(r)}, \cdots X_{n_r}^{(r)}\\ &\quad \cdots, -J_nX_1, \cdots, -J_nX_p, -J_nY_1, \cdots, -J_nY_q, -J_nX_1^{(1)}, \cdots, -J_nX_{n_1}^{(1)}, \cdots, -J_nX_1^{(r)}, \cdots, -J_nX_{n_r}^{(r)})\end{aligned}$$

La famille $\mathcal{B}_2$ est encore une base orthonormée de vecteurs propres pour M. On a donc encore $P_2 = Pass(\mathcal{E}, \mathcal{B}_2) \in \mathcal{O}_{2n}(\mathbb{R})$ et

$$P_2^{-1}AP_2 = P_2^TAP_2 = BlocDiag\left(I_p, I_q, \lambda_1 I_{n_1}, \cdots, \lambda_r I_{n_r}, I_p, I_q, \tfrac{1}{\lambda_1}I_{n_1}, \cdots, \tfrac{1}{\lambda_r}I_{n_r}\right) = D$$

Il reste à vérifier que P_2 est symplectique (le nécessaire est-il suffisant ?), et comme, avec les notations de **Q15,** $P_2 = (X_1, \cdots X_n, X_{n+1}, \cdots, X_{2n})$ est déjà orthogonale, il faut vérifier que $J_nP_2 = P_2J_n$ ce qui est vrai, car le calcul de **Q15** se "remonte" (sachant que $X_{i+n} = -J_nX_i$ et $J_n^2 = -I_{2n}$) :

$$\begin{aligned}J_nP_2 &= (J_nX_1| \cdots |J_nX_n|J_nX_{n+1}| \cdots |J_nX_{2n}) = (-X_{n+1} \cdots - X_{2n}|X_1 \cdots X_n)\\ P_2J_n &= (X_1 \cdots X_n|X_{n+1} \cdots X_{2n}) \begin{pmatrix} O & I_n \\ -I_n & O \end{pmatrix} = (-X_{n+1} \cdots - X_{2n}|X_1 \cdots X_n)\end{aligned}$$

Remarque : Il est dommage que l'énoncé ne demande pas une équivalence en **Q15**.

IV B : **Un exemple** : $A = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 9 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 9 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 9 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ et $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Q 25 . A est bien symétrique réelle et

$$\begin{aligned}A^TJ_2A &= \frac{1}{64}\begin{pmatrix} 9 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 9 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 9 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 9 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 9 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{64}\begin{pmatrix} -3 & -3 & 9 & 1 \\ -3 & -3 & 1 & 9 \\ -9 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & -9 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 9 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 9 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{64}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 64 \\ -64 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -64 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J_2\end{aligned}$$

Q 26 . Calculons le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= (-1)^4 \det(A-\lambda I_4) = \frac{1}{8^4}\det(8A-8\lambda I_4) \\
&= \frac{1}{8^4}\begin{vmatrix} 9-8\lambda & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 9-8\lambda & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 9-8\lambda & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 9-8\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{8^4}\begin{vmatrix} 8-8\lambda & 1 & 3 & 0 \\ 8\lambda-8 & 9-8\lambda & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 9-8\lambda & 8\lambda-8 \\ 0 & 3 & 1 & 8-8\lambda \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{8^2}(\lambda-1)^2\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 9-8\lambda & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 9-8\lambda & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{8^2}(\lambda-1)^2\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 10-8\lambda & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 10-8\lambda & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= -\frac{1}{8^2}(\lambda-1)^2\begin{vmatrix} 10-8\lambda & 6 & 0 \\ 6 & 10-8\lambda & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{8^2}(\lambda-1)^2\begin{vmatrix} 10-8\lambda & 6 \\ 6 & 10-8\lambda \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{8^2}(\lambda-1)^2(8\lambda-16)(8\lambda-4) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

On trouve facilement que $X_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0)^T \in E_1$ et $X_2 = \frac{1}{2}(1,1,1,1)^T \in E_2$.
Ces vecteurs sont unitaires et le calcul donne :

$$\begin{aligned}
J_2X_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\text{et} \qquad J_2X_2 &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Il vient donc que $P = (X_1|X_2|-J_2X_1|-J_2X_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ est orthogonale et symplectique et vérfife

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Partie V

V A : **Un peu de théorie.** Soit $M \in \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ et m canoniquement associée.

Q 27 . Soit $\lambda \in sp_{\mathbb{C}}(M)$ et $X = (x_1, \cdots, x_{2n})^T \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ un vecteur propre attaché. En conjuguant la relation $MX = \lambda X$ il vient $M\overline{X} = \overline{\lambda X}$ (puisque M est réelle) et en la transposant $-X^TM = \lambda X^T$ (puisque M est antisymétrique). On a alors :

$$X^T\left(M\overline{X}\right) = X^T\left(\overline{\lambda X}\right) = \overline{\lambda}\ X^T\overline{X} \quad \text{et aussi} \quad \left(X^TM\right)\overline{X} = \left(-\lambda X^T\right)\overline{X} = -\lambda\ X^T\overline{X}$$

Comme les deux membres de gauche sont égaux il vient $\overline{\lambda}\ X^T\overline{X} = -\lambda\ X^T\overline{X}$. De plus $X^T\overline{X} = \sum_{k=1}^{2n}|x_k|^2 \in \mathbb{R}_+^*$ (car $X \neq 0$) donc $\overline{\lambda} = -\lambda$. On a donc prouvé que les valeurs propres complexes d'une matrice antisymétrique sont imaginaires pures. En conséquence la seule valeur propre réelle possible de M est 0, mais 0 n'est pas valeur propre d'une matrice simplectique (qui est inversible). *Conclusion :* $sp_{\mathbb{R}}(M) = \varnothing$.

Q 28 . D'après la question **Q18** la matrice M^2 est symplectique. Elle est de plus symétrique réelle ($(M \times M)^T = M^T \times M^T = (-M)^2 = M^2$) donc $M^2 \in \mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ et **Q24** donne le résultat demandé.

Dans toute la suite de cette sous-partie on suppose : $\|X\| = 1$ et (1) : $M^2X = \lambda X$.

Q 29 . Ici on a : $MJ_nM = -J_n$.

• En multipliant (1) à gauche par M on obtient $M^2(MX) = \lambda(MX)$ et comme M est inversible et X non nul on a $MX \neq 0$ donc : MX est un vecteur propre de M^2 attaché à la valeur propre λ.
• M est symplectique donc inversible et M^2 aussi. Ainsi $\lambda \neq 0$ et on peut écrire $X = \frac{1}{\lambda}M^2X$ et alors :

$$M^2(J_nX) = \frac{1}{\lambda}M^2J_nM^2X = \frac{1}{\lambda}M(MJ_nM)MX = \frac{1}{\lambda}M(-J_n)MX = \frac{1}{\lambda}J_nX$$

donc J_nX est un vecteur propre de M^2 attaché à la valeur propre $\frac{1}{\lambda}$.
• En enchaînant le deux propriétés on voit que si X est un vecteur propre de M^2 attaché à λ alors MX est attaché à λ et J_nMX à $\frac{1}{\lambda}$.

Q 30 . Soit $F = vect(X, MX, J_nX, J_nMX)$.

• Pour montrer que F est stable par M il suffit de montrer que les images par M des 4 vecteurs générateurs sont encore dans F. Or $M(X) = MX \in F$, $M(MX) = M^2X = \lambda X \in F$, $M(J_nX) = \frac{1}{\lambda}MJ_nM^2X = -\frac{1}{\lambda}J_nMX \in F$ et $M(J_nMX) = -\left(M^TJ_nM\right)X = -J_nX \in F$.
• On a de même que F est stable par J_n. car :

$$J_n(X) = J_nX \in F,\quad J_n(MX) = J_nMX \in F,\quad J_n(J_nX) = -X \in F \quad \text{et} \quad J_n(J_nMX) = -MX \in F$$

Q 31 . Comme $sp_{\mathbb{R}}(M) = \varnothing$ la famille (X, MX) est libre et le sous-espace $G = vect(X, MX)$ est stable par m. L'endomorphisme g induit par m sur G a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base (X, MX). Alors $\chi_g(T) = T^2 - \lambda$ et puisque f, et donc aussi g, n'a pas de valeur propre réelle on a bien $\lambda < 0$.

Q 32 . *Hypothèse :* $\lambda \neq -1$.

• Montrons que $\mathcal{F} = (X, MX, J_nX, J_nMX)$ est libre. Si on a (1) : $\alpha X + \beta MX + \gamma J_nX + \delta J_nMX = 0$, alors en appliquant M^2 on a, compte tenu que les 4 vecteurs sont propres (2) : $\alpha\lambda X + \beta\lambda MX + \frac{\gamma}{\lambda}J_nX + \frac{\delta}{\lambda}J_nMX = 0$ et la combinaison $(1) - \lambda(2)$ donne :

$$(3) \qquad \alpha\left(1-\lambda^2\right)X + \beta\left(1-\lambda^2\right)MX = 0$$

Comme $\lambda \neq 1$ (car on a vu que λ est strictement négatif) et $\lambda \neq -1$ par hypothèse, on a $1 - \lambda^2 \neq 0$ donc $\alpha X + \beta MX = 0$ et (famille libre) $\alpha = \beta = 0$. La relation (1) se réécrit $\gamma J_nX + \delta J_nMX = 0$ puis $\gamma X + \delta MX = 0$ puisque J_n est inversible et enfin $\gamma = \delta = 0$. La famille $\mathcal{F}$ est donc une base de F qui est de dimension 4.
• Comme M^2 est symétrique réelle, des vecteurs propres attachés à des valeurs propres distinctes (ici λ et $\frac{1}{\lambda}$) sont orthogonaux. Cela donne que X et MX sont orthogonaux à J_nX et J_nMX. Il reste à voir que $\langle X, MX\rangle = 0$ et $\langle J_nX, J_nMX\rangle = 0$. Or, l'antisymétrie de M donne

$$\langle X, MX\rangle = X^TMX = \left(X^TMX\right)^T = -X^TMX = -\langle X, MX\rangle \qquad \text{donc } \langle X, MX\rangle = 0$$

et aussi : $\langle J_nX, J_nMX\rangle = (J_nX)^T J_nMX = X^T\underbrace{J_n^TJ_n}_{I_{2n}}MX = X^TMX = 0$. Ainsi $\mathcal{F}$ est orthogonale.

• Calculons les normes des 4 vecteurs. Par hypothèse $\|X\| = 1$. Ensuite $\|MX\|^2 = X^TM^TMX = -X^TM^2X = -\lambda X^TX = -\lambda$. Puis, J_n étant orthogonale $\|J_nX\|^2 = \|X\|^2 = 1$ et enfin $\|J_nMX\|^2 = \|MX\|^2 = -\lambda$. La famille $\mathcal{F}_0$ suivante est donc bien une base orthonormée de F

$$\mathcal{F}_0 = \left(\ X, \frac{-1}{\sqrt{-\lambda}}MX, -J_nX, \frac{1}{\sqrt{-\lambda}}J_nMX\ \right)$$

• Déterminons la matrice M_F de m_F dans $\mathcal{F}_0 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ en posant $a = \sqrt{-\lambda}$. On a vu en **Q30** que $M(X) = MX$, $M(MX) = \lambda X \in F$, $M(J_nX) = -\frac{1}{\lambda}J_nMX$ et $M(J_nMX) = -J_nX$. Cela donne :

$$\begin{cases} m_F(e_1) = MX = -\sqrt{-\lambda}e_2 \\ m_F(e_2) = \frac{-1}{\sqrt{-\lambda}}M^2X = \sqrt{-\lambda}X = \sqrt{-\lambda}e_1 \\ m_F(e_3) = -MJ_nX = \frac{1}{\lambda}J_nMX = -\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}e_4 \\ m_F(e_4) = \frac{1}{\sqrt{-\lambda}}MJ_nMX = \frac{-1}{\sqrt{-\lambda}}J_nX = \frac{1}{\sqrt{-\lambda}}e_3 \end{cases} \quad \text{et} \quad M_F = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$$

Q 33 . C'est un résultat général connu pour les matrices symétriques et qui vaut encore pour les matrices antisymétriques M et J_n. En effet si $Y \in F^\perp$ alors

$$\forall Z \in F \quad \langle MY, Z\rangle = Y^TM^TZ = -\langle Y, MZ\rangle = 0 \ \text{ car } Y \in F^\perp \text{ et } \ MZ \in F \text{ (stabilité)}$$

On a donc $\forall Y \in F^\perp \ \ MY \in F^\perp$ et $F^\perp$ est stable par M, et par J_n.

Q 34 . *Quelle terrible question à rédiger !*

Nous savons (**Q31**) que 1 n'est pas valeur propre de M^2. Nous dirons dans la suite que deux sous-espaces F et G de $\mathbb{R}^{2n}$ sont "doublement orthogonaux" s'ils vérifient :

$$\forall (Y, Z) \in F \times G \quad \langle Y, Z\rangle = 0 = \varphi(Y, Z)$$

Remarquons alors que si F et G sont orthogonaux (pour le produit scalaire canonique) et si F (ou G) est stable par J_n alors ils sont doublement orthogonaux. En effet dans ce cas on a pour $(Y,Z) \in F \times G \quad \varphi(Y,Z) = -\varphi(Z,Y) = -\underbrace{Z}_{\in G}{}^T \underbrace{J_n Y}_{\in F} = 0$

• Commençons par traiter une question **Q32 bis** correspondant au cas où $\lambda = -1$. Il y a alors 2 sous-cas.

$\rightsquigarrow$ ou bien $J_n X \in vect(X, MX)$ et alors le sous espace $F' = vect(X, MX)$ est de dimension 2 stable par M (puisque $M^2 X = -X$).

Montrons que F' est aussi stable par J_n. On a $J_n X = \alpha X + \beta M X$ donc (en appliquant J_n) $-X = \alpha J_n X + \beta J_n M X$. Si $\beta \neq 0$ il vient $J_n M X = \frac{-1}{\beta}(X + \alpha J_n X) \in F'$ et si $\beta = 0$ alors $J_n X = \alpha X$ et $(M J_n M) X = -J_n X = -\alpha X = -\alpha M^2 X$ il vient $M(J_n M X) = M(-\alpha M X)$ donc $J_n M X = -\alpha M X$ par injectivité de M et on a bien $J_n M X \in F'$. De plus (X, MX) est une base orthonormée de F' (la preuve de **Q29** marche encore si $\lambda = -1$) dans laquelle la matrice de $m_{F'}$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = J_2$.

$\rightsquigarrow$ ou bien $J_n X \notin vect(X, MX)$ et alors $F = vect(X, MX, J_n X, J_n M X)$ est de dimension 4 stable par M et J_n. En effet, pour "famille libre", en reprenant la question **Q.32,** de l'inégalité

$$(1) : \alpha X + \beta M X + \gamma J_n X + \delta J_n M X = 0$$

en appliquant J_n on tire $\quad (2) : \alpha J_n X + \beta J_n M X - \gamma X - \delta M X = 0$ puis $\beta(1) - \delta(2)$ donne

$$(3) : (\alpha\beta + \gamma\delta) X + (\beta^2 + \delta^2) M X + (\beta\gamma - \alpha\delta) J_n X = 0$$

Comme les 3 vecteurs sont supposés indépendants on tire $\alpha\beta + \gamma\delta = \beta^2 + \delta^2 = \beta\gamma - \alpha\delta = 0$. En particulier $\beta = \delta = 0$ et en revenant à (1) : $\alpha = \gamma = 0$. Cette fois $(X, MX, J_n X, J_n M X)$ n'est peut-être pas orthonormée mais la matrice dans cette "certaine" base est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ qui est de la forme voulue.

Remarque : comme en **Q33** dans les deux cas $F'^{\perp}$ est stable par M et par J_n.

On peut maintenant construire la décomposition demandée.

• Soit λ_1 valeur propre de M^2 et X_1 unitaire dans $E_{-1}(M^2)$. La question **Q32** et le point précédent donnent un sous-espace F_1 de dimension 2 ou 4, stable par M et par J_n , ainsi que $F_1^{\perp}$ et donc "doublement orthogonaux" , donnant à m une matrice induite comme voulu.

• Si $F_1 = \mathbb{R}^{2n}$ c'est fini. Sinon $\mathbb{R}^{2n} = F_1 \oplus F_1^{\perp}$ et comme $F_1^{\perp}$ est stable par m, il l'est par m^2 et l'endomorphisme

induit $m^2_{F_1}$ étant symétrique possède un vecteur propre unitaire X_2 dans $F_1^{\perp}$ qui donne par la même méthode $F_2 = vect(X_2, MX_2, J_n X_2, J_n M X_2)$ ou $F_2 = vect(X_2, MX_2)$ satisfaisant toutes les conditions souhaitées.
On construit ainsi de proche en proche $\mathbb{R}^{2n} = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_q$ comme demandé.

V B : Mise en application avec $B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -5 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

Q 35 . $B^2 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -17 & 0 & -15 & 0 \\ 0 & -17 & 0 & -15 \\ -15 & 0 & -17 & 0 \\ 0 & -15 & 0 & -17 \end{pmatrix}$ ce qui donne $B^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Q 36 . La matrice B est antisymétrique et aussi symplectique car

$$\begin{aligned}
B^T J_2 B &= \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 3 \\ -5 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ -3 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -5 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 3 \\ -5 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ -3 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & -5 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \\ -5 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \\ -16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J_2
\end{aligned}$$

Il suffit alors d'appliquer la question **Q30** avec $X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ qui est un vecteur propre unitaire de B^2 attaché à la valeur propre -4. Alors les colonnes $X, \frac{-1}{\sqrt{-\lambda}}MX, -J_nX, \frac{1}{\sqrt{-\lambda}}J_nMX$, soit ici $X, -\frac{1}{2}BX, -J_nX, \frac{1}{2}J_nBX$ donnent la matrice orthogonale et symplectique voulue. Calculons ces vecteurs :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}BX &= -\frac{1}{16}\begin{pmatrix}0&-5&0&-3\\5&0&3&0\\0&-3&0&-5\\3&0&5&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\\
-J_nX &= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}\\
\frac{1}{2}J_nBX &= (-J_n)\left(-\frac{1}{2}BX\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Concluons : la matrice $P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\\1&1&1&1\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}$ est orthogonale et symplectique et

$$P^TBP = \begin{pmatrix}0&2&0&0\\-2&0&0&0\\0&0&0&\frac{1}{2}\\0&0&-\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$$