Séries entières

Comme d'habitude, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I SÉRIES ENTIÈRES : DÉFINITION, CONVERGENCE

1. Deux rappels sur les séries

a. Ici commence le royaume de la règle de d'Alembert

…que l'on rappelle donc au passage :

Proposition (règle de d'Alembert)

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite de réels ou de complexes telle que :

i – $(u_n)_{n \geq n_0}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang ;

ii – $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Alors :

- Si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ est absolument convergente.
- • Si $\ell > 1$, $\sum u_n$ est une série grossièrement divergente.

b. Produit de Cauchy de deux séries

i* – *Définition

Le produit de Cauchy des deux séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ est la série $\sum_{n \geq 0} w_n$ dont le terme général w_n est donné par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} v_k u_{n-k}.$$

ii* – *Proposition

Le produit de Cauchy $\sum_{n \geq 0} w_n$ de deux séries **absolument convergentes** $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge,

et l'on a : $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)}$.

2. Série entière

Définition (série entière)

On appelle série entière sur $\mathbb{K}$ toute série formelle $\sum_{n \geq 0} a_n X^n$, où $(a_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

Définitions (opérations sur les séries entières)

Notons $SE(\mathbb{K})$ l'ensemble des séries entières sur $\mathbb{K}$ (*ce n'est pas une notation standard)*).

On définit sur $SE(\mathbb{K})$ les opérations suivantes :

Addition interne

$$\forall \left(\sum_{n \geq 0} a_n X^n, \sum_{n \geq 0} b_n X^n \right) \in \left(SE(\mathbb{K}) \right)^2, \sum_{n \geq 0} a_n X^n + \sum_{n \geq 0} b_n X^n = \sum_{n \geq 0} \left(a_n + b_n \right) X^n .$$

Multiplication externe

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \sum_{n \geq 0} a_n X^n \in SE(\mathbb{K}), \lambda \sum_{n \geq 0} a_n X^n = \sum_{n \geq 0} \left(\lambda a_n \right) X^n .$$

Multiplication interne : produit de Cauchy de deux séries entières

$$\forall \left(\sum_{n \geq 0} a_n X^n, \sum_{n \geq 0} b_n X^n \right) \in \left(SE(\mathbb{K}) \right)^2, \left(\sum_{n \geq 0} a_n X^n \right) \times \left(\sum_{n \geq 0} b_n X^n \right) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) X^n .$$

3. Convergence d'une série entière

a. Le lemme d'Abel

Soit ρ un réel strictement positif. Si la suite $\left(a_n \rho^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \rho$:

- • $a_n z^n = O\left(\left(\frac{|z|}{\rho} \right)^n \right)$.
- •• La série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge absolument.

Preuve

On suppose donc la suite $\left(a_n \rho^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée : autrement dit, on a $a_n \rho^n = O(1)$. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \rho$,

$$\frac{a_n z^n}{\left(\frac{|z|}{\rho} \right)^n} = a_n \rho^n \left(\frac{z}{|z|} \right)^n = O\left(\left(\frac{z}{|z|} \right)^n \right) = O(1),$$

d'où le premier point grâce au critère du quotient. Comme la série $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{|z|}{\rho} \right)^n$ (géométrique, de raison strictement inférieure à 1 en valeur absolue) converge, le second point en découle.

b. Rayon de convergence, disque de convergence

Définition (rayon de convergence)

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière. On définit le rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ de cette série entière par :

$$R = \operatorname{Sup} \left\{ r \in \mathbb{R}_+, \left(|a_n| r^n \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\}.$$

Remarque

Cette borne supérieure est bien définie dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, car il est évident que $\left(|a_n| r^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée lorsque $r = 0$. Ainsi, $\left\{ r \in \mathbb{R}_+, \left(|a_n| r^n \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\}$ est un ensemble non vide et minoré par 0.

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière, et soit R son rayon de convergence. Alors :

Théorème

Pour tout $z \in \mathbb{K}$ tel que $|z| < R$, $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge absolument.

Pour tout $z \in \mathbb{K}$ tel que $|z| > R$, $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ diverge grossièrement.

Remarque

On ne peut rien dire de général dans le cas où $|z| = R$ *:* $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ *peut alors être semi – convergente, absolument convergente, ou divergente.*

Disque ouvert de convergence ; intervalle ouvert de convergence

Le disque ouvert $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$ est appelé disque ouvert de convergence de la série entière de la variable complexe z : $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$. L'intervalle $]-R, R[$ est appelé intervalle ouvert de convergence de la série entière de la variable réelle x : $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

D'après le théorème précédent :

Pour tout complexe z appartenant au disque ouvert de convergence, $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge absolument. En particulier, pour tout réel x appartenant à l'intervalle ouvert de convergence, $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ converge absolument.

c. Détermination pratique du rayon de convergence : quelques résultats

La règle de d'Alembert s'adapte aux séries entières de la façon suivante :

Proposition 1

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière, soit R son rayon de convergence. On suppose que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Alors :

- • Si la suite $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel non nul ℓ, on a $R = \frac{1}{\ell}$.
- • • Si $\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$, on a $R = +\infty$.
- • • • Si $\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$, on a $R = 0$.

Il convient de s'assurer que l'on sait démontrer ces résultats, et que l'on sait se débrouiller lorsque l'hypothèse « $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang » n'est pas vérifiée (pour des séries entières du type $\sum_{n \geq 0} a_{2n} z^{2n}$ par exemple)...

On donne ci-dessous quelques critères de « bon sens », qu'il faut également savoir démontrer :

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière, soit R son rayon de convergence. Soit $z_0 \in \mathbb{K}$. Alors :

- $\bullet$ Si la suite $\left(a_n z_0^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, $R \geq \left|z_0\right|$.
- $\bullet\bullet$ Si la série $\sum_{n\geq 0} a_n z_0^n$ converge, $R \geq \left|z_0\right|$.
- $\bullet\bullet\bullet$ Si la suite $\left(a_n z_0^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, $R \leq \left|z_0\right|$.
- $\bullet\bullet\bullet\bullet$ Si la série $\sum_{n\geq 0} a_n z_0^n$ diverge, $R \leq \left|z_0\right|$.

Proposition 2 (comparaison de rayons de convergence)

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ deux séries entières, de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

- $\bullet$ Si $\left|a_n\right| \leq \left|b_n\right|$ à partir d'un certain rang, $R_a \geq R_b$.
- $\bullet\bullet$ S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que . $a_n = O\left(n^\alpha b_n\right)$, $R_a \geq R_b$.
- $\bullet\bullet\bullet$ S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que . $a_n \sim n^\alpha b_n$, $R_a = R_b$.
- $\bullet\bullet\bullet\bullet$ En particulier, $a_n \sim b_n$, $R_a = R_b$.

A savoir démontrer, toujours...

4. Rayon de convergence et opérations algébriques

Proposition

Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ deux séries entières, de rayons de convergences respectifs R_a et R_b.

- $\bullet$ Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} \lambda a_n z^n$ est égal à R_a, et pour tout $z \in \mathbb{K}$

  tel que $|z| < R_a$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

- $\bullet\bullet$ Le rayon de convergence R de $\sum_{n\geq 0} \left(a_n + b_n\right) z^n$ est

  $$\begin{cases} \text{égal à } \min\left(R_a, R_b\right) \text{ si } R_a \neq R_b \\ \text{supérieur ou égal à } \min\left(R_a, R_b\right) = R_a \text{ si } R_a = R_b \end{cases}.$$

  Pour tout $z \in \mathbb{K}$ tel que $|z| < R$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n + b_n\right) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$.

- $\bullet\bullet\bullet$ Le rayon de convergence R de la série entière produit $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$, où $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, est

  supérieur ou égal à $\min\left(R_a, R_b\right)$, et :

  pour tout $z \in \mathbb{K}$ tel que $|z| < R$, $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$.

Remarques

- Si $R_a = R_b$, il est possible que le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0}(a_n+b_n)z^n$ soit strictement supérieur à R_a : il suffit pour s'en convaincre de considérer une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence différent de $+\infty$, et de poser $b_n = -a_n$.
- • Si les séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ sont à supports disjoints (ie., telles que $\forall\ n, a_n b_n = 0$), alors le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0}(a_n+b_n)z^n$ est égal à $\min(R_a, R_b)$.

II DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE ENTIÈRE USUELS

A connaître, et à savoir démontrer…

Nom	RC	Développement en série entière
exp	$+\infty$	$\forall\ z\in\mathbb{C},\ \exp z = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$
sin (variable réelle)	$+\infty$	$\forall\ x\in\mathbb{R},\ \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$
cos (variable réelle)	$+\infty$	$\forall\ x\in\mathbb{R},\ \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$
ch (variable réelle)	$+\infty$	$\forall\ x\in\mathbb{R},\ \mathrm{ch}\ x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$
sh (variable réelle)	$+\infty$	$\forall\ x\in\mathbb{R},\ \mathrm{sh}\ x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$x\mapsto\ln(1-x)$, x réel	1	$\forall\ x\in[-1,1[,\ \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$
$x\mapsto\ln(1+x)$, x réel	1	$\forall\ x\in]-1,1],\ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$
$z\mapsto\frac{1}{1-z}$: SE. géométrique	1	$\forall\ z\in\mathbb{C},\ \lvert z\rvert<1 : \sum_{n=0}^{+\infty}z^n = \frac{1}{1-z}$
$z\mapsto\frac{1}{1+z}$: géométrique again	1	$\forall\ z\in\mathbb{C},\ \lvert z\rvert<1 : \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}$
Série entière géométrique dérivée	1	$\forall\ z\in\mathbb{C},\ \lvert z\rvert<1,\ \sum_{n=1}^{+\infty}n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n = \frac{1}{(1-z)^2}$
Série entière dérivée seconde	1	$\forall\ z\in\mathbb{C},\ \lvert z\rvert<1 : \sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)z^{n-2} = \frac{2}{(1-z)^3}$
Série entière géom. dérivée $p^{\text{ème}}$	1	$\forall\ z\in\mathbb{C},\ \lvert z\rvert<1 : \sum_{n=p}^{+\infty}\frac{n!}{(n-p)!}z^{n-p} = \frac{p!}{(1-z)^{p+1}}$
$x\mapsto(1+x)^\alpha$, $\alpha\notin\mathbb{N}$, x réel	1	$\forall\ x\in]-1,1[: \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)}{n!}x^n = (1+x)^\alpha$
$x\mapsto\frac{1}{\sqrt{1-x}}$, x réel	1	$\forall\ x\in]-1,1[: \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\left(\frac{x}{4}\right)^n$
arctan (variable réelle)	1	$\forall\ x\in]-1,1[,\ \arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$

III RÉGULARITÉ D'UNE SOMME DE SÉRIE ENTIÈRE

A – Variable réelle ou complexe

1. Fonction développable en série entière

Définition 1 (fonction développable en série entière au voisinage de 0)

Soit f une fonction d'une variable réelle ou complexe, définie au voisinage de 0. On dit que f est développable en série entière au voisinage de 0 lorsqu'il existe une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et un réel r non nul tels que :

pour tout $z \in D_f$ tel que $|z| < r$: $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge, et $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Définition 2 (fonction développable en série entière au voisinage d'un point, HP)

Soit f une fonction d'une variable réelle ou complexe, définie au voisinage de $a \in \mathbb{K}$. On dit que f est développable en série entière au voisinage de a lorsqu'il existe une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et un réel r non nul tels que :

pour tout $z \in \mathbb{K}$ tel que $a + z \in D_f$ et $|z| < r$: $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge, et $f(a+z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$,

ou encore : $\forall z \in D_f$ tel que $|z - a| < r$: $\sum_{n \geq 0} a_n (z-a)^n$ converge, et $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$.

Remarque : Lorsque l'on dit, sans autre précision, que f est développable en série entière, il est sous – entendu que c'est au voisinage de 0 (seul cas officiellement au programme).

Proposition (algèbre des fonctions développables en série entière au voisinage d'un point)

Soit $a \in \mathbb{K}$. L'ensemble des fonctions développables en séries entières au voisinage de a, muni des lois naturelles, est un espace vectoriel, et de plus est stable par multiplication interne.

2. Convergence normale sur tout compact du disque ouvert de convergence

a. Le théorème

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Pour tout $r \in [0, R[$, $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge normalement sur $D(0, r) = \{z \in \mathbb{K}, |z| \leq r\}$.

Remarque

Dans le cas réel, $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ converge donc normalement sur tout segment de $]-R, R[$.

b. Une première conséquence

Corollaire

La fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur le disque ouvert de convergence.

Remarques

- Dans le cas réel, et avec les notations habituelles, $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.

- • Si la série $\sum_{n \geq 0} |a_n| R^n$ converge, $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge normalement sur $D(0, R)$: dans ce cas, la fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur le disque **fermé** de convergence.

3. Développement limité

a. *Proposition (développement limité d'une fonction somme de série entière)*

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Soit $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme de cette série entière. Alors f admet au voisinage de 0 un développement limité à tout ordre $n \in \mathbb{N}$, et celui – ci est donné par :

$$f(z) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k z^k + o\left(z^n\right).$$

Remarque : Ceci donne un éclairage sur la raison pour laquelle on qualifie ces développements de « limités »…

b. Premières conséquences

Corollaire 1 (unicité, sous réserve d'existence, du développement en série entière)

- Soit f une fonction admettant un développement en série entière au voisinage de 0. Alors, celui – ci est unique.

- • Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ de séries entières de rayons de convergence non nuls. On suppose qu'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $z \in B_0(0, r)$, $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ convergent et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$. Alors : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n$.

Corollaire 2 (développement en série entière d'une fonction paire ou impaire)

Soit $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une fonction somme de série entière de rayon de convergence non nul.

f est paire (resp. impaire) si et seulement si pour tout n impair (resp. pair), $a_n = 0$.

B – Variable réelle : dérivation, intégration, et conséquences

Dans tout ce paragraphe, on considère des séries entières d'une variable **réelle**. Quant aux valeurs prises, elles sont dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (les a_n peuvent être complexes).

1. Intégration terme à terme

Théorème (intégration terme à terme d'une somme de série entière)

- Les séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^n$ ont même rayon de convergence R.

•• Pour tout segment $[\alpha, \beta]$ de $]-R, R[$, $\int_{\alpha}^{\beta} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} \beta^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} \alpha^{n+1}$.

••• Pour tout $x \in]-R, R[$, on a $\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

2. Dérivation terme à terme

Théorème (dérivation terme à terme d'une somme de série entière)

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \, dx$ une fonction somme d'une série entière de rayon de convergence R. Alors :

- • La série entière $\sum_{n \geq 1} n x^{n-1}$ a même rayon de convergence R.
- •• f est de classe C^1 sur $]-R, R[$, et pour tout $x \in]-R, R[$:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Généralisation (dérivée p – ème)

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \, dx$ une fonction somme d'une série entière de rayon de convergence R. Alors :

- • La série entière $\sum_{n \geq p} \frac{n!}{(n-p)!} x^{n-p}$ a même rayon de convergence R.
- •• f est de classe C^{∞} sur $]-R, R[$, et pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^n = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p}.$$

- • En particulier : $\forall x \in]-R, R[\; : \; f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$.
- •• Les séries entières se dérivent ou s'intègrent sur l'intervalle *ouvert* de convergence. Une intégration ou dérivation jusqu'à une borne de l'intervalle de convergence ne peut se justifier en général qu'en revenant aux théorèmes de dérivation ou d'intégration de séries de fonctions.

IV SÉRIES DE TAYLOR

1. Définition

Soit f une fonction de classe C^{∞} sur un intervalle $]-r, r[$. La série de Taylor de f est la série $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

2. Identification sous réserve d'existence

Proposition (les développements en séries entières sont les séries de Taylor)

Si f est développable en série entière sur $]-r, r[$, alors f est de classe C^{∞} sur cet intervalle, et son développement est sa série de Taylor : $\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

3. Caractérisation des fonctions développables en série entière

Proposition (condition nécessaire et suffisante de développabilité en série entière)

Soit f une fonction définie au voisinage de 0.

f est développable en série entière au voisinage de 0 si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

i – La fonction f est de classe C^∞ au voisinage de 0.

ii – $\exists r > 0, \ \forall x \in]-r, r[, \ \lim_{n \to +\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \, \mathrm{d}t = 0$.

V SÉRIE GÉNÉRATRICE D'UNE VAR À VALEURS DANS $\mathbb{N}$

1. Définition

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$.

a. Série génératrice d'une variable aléatoire à valeurs entières

La série génératrice de X, notée G_X, est la fonction d'une variable réelle t définie par : $\boxed{G_X : t \mapsto \mathbb{E}\left(t^X\right)}$.

b. Expression comme somme d'une série entière

Soit t un réel. D'après le théorème du transfert, G_X est définie en t si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X = n) t^n$ converge absolument. Lorsque tel est le cas : $\boxed{G_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) t^n}$.

Autrement dit, G_X est la fonction $G_X : t \mapsto \mathbb{E}\left(t^X\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) t^n$*, définie sur l'ensemble :*

$$\left\{ t \in \mathbb{R}, \ \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X = n) t^n \text{ converge absolument} \right\}.$$

2. Séries génératrices des lois géométriques et de Poisson

Proposition

- Soient $p \in]0,1[$, $q = 1 - p$, et soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Alors la série génératrice de X a pour rayon de convergence $\boxed{\frac{1}{q}}$, et pour tout $t \in \left]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right[$: $\boxed{G_X(t) = \frac{pt}{1 - qt}}$.

- • Soit $\lambda > 0$, et soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Alors la série génératrice de X a pour rayon de convergence $\boxed{+\infty}$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\boxed{G_X(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}}$.

3. Propriétés fondamentales des séries génératrices

On considère ici une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$.

a. Définition et valeur en 1

La série génératrice de X est définie en 1, et l'on a $\boxed{G_X(t) = 1}$.

Preuve : $\left((X = n)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ étant un système complet d'évènements, $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X = n)1^n = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X = n)$ converge (absolument), et l'on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$.

b. Minoration du rayon de convergence

Le rayon de convergence de G_X est supérieur ou égal à 1.

c. Les séries génératrices caractérisent la loi

Deux var à valeurs dans $\mathbb{N}$ ont la même loi si et seulement si leurs séries génératrices sont égales.

4 Espérance, variance et dérivées de la fonction génératrice

Proposition

Soit X une variables aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors :

- • X admet une espérance s si G_X est dérivable en 1, et lorsque tel est le cas : $\mathbb{E}(X) = G_X'(1)$.
- •• X admet une variance s si $G_X''(1)$ existe, et lorsque tel est le cas : $G_X''(1) = \mathbb{E}\left(X(X-1)\right)$.

5. Fonction génératrice d'une somme de variables aléatoires (entières) indépendantes

Etant donnée une variable aléatoire X à valeurs entières, on note ici $R(X)$ le rayon de convergence de sa série génératrice.

Théorème

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes.

Alors $R(X+Y) \geq \min\left(R(X), R(Y)\right)$, et :

$$\forall t \in \left]-\min\left(R(X), R(Y)\right), \min\left(R(X), R(Y)\right)\right[: \boxed{G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)}.$$

Autrement dit, G_{X+Y} *est le produit de Cauchy de* G_X et de G_Y.