Lycée Lakanal

2024 - 2025

PC

# *Liste d'exercices*

## *Séries entières*

---

### Exercice 1

Déterminer, dans chacun des cas suivants, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

**1.** $(a_n)$ admet une limite finie non nulle.

**2.** $(a_n)$ est périodique non nulle

**3.** $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \sum_{d \mid n} d^2$

**4.** $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{n^n}{n!}$

**5.** $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = (\ln n)^{-\ln n}$

**6.** $a_n = \dfrac{1.4.7.\dots.(3n+2)}{n!}$.

**7.** $a_0 = a_1 = 1,\ a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$.

**8.** $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n} = a^n,\ a_{2n+1} = b^n$, avec $0 < a < b$.

---

### Exercice 2

Les affirmations suivantes sont – elles vraies ou fausses ? En donner une démonstration ou un contre – exemple.

**1.** $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

**2.** $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont même domaine de convergence.

**3.** Si $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence infini, alors elle converge normalement sur $\mathbb{R}$.

**4.** Si $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $[-R, R]$, alors elle converge normalement sur $B_F(0, R)$ dans $\mathbb{C}$.

**5.** Si $\sum a_n z^n$ converge sur $[-R, R]$, alors elle converge sur $B_F(0, R)$ dans $\mathbb{C}$.

---

### Exercice 3

Pour $x$ réel, on pose $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Montrer que $f$ est de classe $C^{+\infty}$ sur $\mathbb{R}$.

---

### Exercice 4

Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes :

**1.** $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{2n-1}$

**2.** $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n \sin(n\theta)}{2^n}$

**3.** $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{(n+1)(n+3)}$

**4.** $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{4n^2-1}$

**5.** $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n+1} x^n$

## Exercice 5

**1.** Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\left(\sum \dfrac{\sin(\alpha n)}{n} x^n\right)_{n \geq 1}$.

**2.** Calculer la somme de cette série entière sur son intervalle ouvert de convergence.

## Exercice 6

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$.

**1.** Rayon de convergence et calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

**2.** Développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{e^x}{(1-x)^2}$.

## Exercice 7

Développer en série entière la fonction qui à $x$ associe :

**1.** $\ln\left(1 + x + x^2\right)$.

**2.** $\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

**3.** $\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}$

**4.** $\dfrac{1}{2x^3 - x - 1}$

**5.** $\dfrac{1-x}{\left(1+2x-x^2\right)^2}$

**6.** $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

**7.** $\arctan(x+1)$.

**8.** $\int_0^x \dfrac{\ln\left(t^2 - \frac{5}{2}t + 1\right)}{t}\,dt$

**9.** $\left(\dfrac{(1+x)\sin x}{x}\right)^2$

**10.** $\int_x^{2x} e^{-t^2}\,dt$

On précisera le rayon de convergence de la série entière obtenue.

## Exercice 8

**1.** Que dire du rayon de convergence d'une somme de deux séries entières ? Le démontrer.

**2.** Déterminer le développement en série entière et le rayon de convergence de :

$$f : x \mapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x).$$

**3.** Que peut – on dire pour $x = \dfrac{1}{4}$ ? $x = \dfrac{1}{2}$ ? $x = -\dfrac{1}{2}$ ?

## Exercice 9

Soient $a$ et $b$ deux complexes distincts non nuls. Développer en série entière la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(x-a)(x-b)}$.

## Exercice 10

Soit $a$ un réel non nul. Développer en série entière la fonction $x \mapsto \ln\left(\sqrt{x^2 - 2x\,\mathrm{ch}\,a + 1}\right)$.

## Exercice 11

Soit pour $n \geq 0$, $a_n = \dfrac{(-1)^n \binom{2n}{n}}{2n-1}$.

**1.** Prouver la relation : $(n+1)\,a_{n+1} = -2(2n-1)\,a_n$.

**2.** Trouver le rayon de convergence de la série entière $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

**3.** Trouver une équation différentielle du premier ordre vérifiée par $f$.

**4.** En déduire $f$.

**5.** Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{4^n}$.

## Exercice 12

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \left(2x - x^2\right)^n$.

**1.** Déterminer le domaine de définition de $f$.

**2.** Déterminer le plus grand intervalle contenant $0$ sur lequel $f$ est développable en série entière.

## Exercice 13

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\cos x}$ est développable en série entière au voisinage de $0$.

On pourra raisonner par analyse – synthèse, en commençant par supposer $f$ développable en série entière, et en considérant un produit de Cauchy adéquat.

## Exercice 14

Rayon de convergence $R$ de la série entière $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{\sum_{k=1}^{n} k^{-\alpha}}$. Etudier la convergence en $R$ et en $-R$.

## Exercice 15

Calculer en utilisant une série entière : $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{\binom{2n}{n}}$.

## Exercice 16

On considère la série entière de la variable complexe $z$ : $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n}$.

**1.** Calculer la somme $f(z)$ de cette série lorsque $|z| = r \in [0,1[$ est fixé.

**2.** En déduire les sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos n\theta}{n}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin n\theta}{n}$ lorsque $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

## Exercice 17

Pour tout réel $x$, on pose $f(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^4}$.

Développer la fonction $f$ en série entière au voisinage de $0$. Quel est le rayon de convergence de la série obtenue ?

## Exercice 18*

**1.** Domaine de définition de la fonction $f$ définie par la formule : $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+z}$.

**2.** Développer $f$ en série entière.
Donner le rayon de convergence de la série entière obtenue.

## Exercice 19

Via une équation différentielle convenable, développer en série entière la fonction $x \mapsto \arcsin^2 x$.

## Exercice 20

Soit $a$ un nombre complexe tel que $|a| < 1$. Développer en série entière la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par la formule : $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(a^n z)$.

## Exercice 21

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 1$, et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n u_1 + u_{n-1} u_2 + \ldots + u_2 u_{n-1} + u_1 u_n$$

Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{9}\right)^n u_n = \frac{1}{3}$.

## Exercice 22

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $a_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}\binom{2n}{n}$.

**a.** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1) a_{n+1} = -2(2n-1) a_n$.

**b.** Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\left(\sum a_n x^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

**c.** On note $f$ la somme de cette série entière sur son intervalle ouvert de convergence. Trouver une équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiée par $f$.

**d.** En déduire $f$.

**e.** Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{4^n}$.

## Exercice 23

Déterminer les solutions développables en série entière au voisinage de $0$ de l'équation différentielle :

$$4xy'' + 2y' + y = 0.$$

## Exercice 24

Déterminer les solutions développables en série entières au voisinage de $0$ de l'équation différentielle :

$$x^2 y'' + x^2 y' - 2y = 0.$$

## Exercice 25

Résoudre l'équation différentielle $(\boldsymbol{E}) :\ y'' + xy = 0$, avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

(On donnera la solution sous la forme de la somme d'une série entière.)

## Exercice 26

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = u_1 = 1, \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + \frac{2}{n+1} u_{n-1}.$$

**1.** Montrer que pour tout $n$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{n+3}{n+1}$.

**2.** Montrer que $\left(\dfrac{u_n}{n^2}\right)$ est décroissante.

**3.** En déduire le rayon de convergence de la série entière de terme général $u_n x^n$.

On note $f$ sa somme.

**4.** Déterminer une équation différentielle satisfaite par $f$, et calculer $f$.

## Exercice 27

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\, dt$. On donne : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} u_n$.

On considère l'équation différentielle : $(E) : (x^2 - 1) y''(x) + 3x y'(x) + y(x) = 0$.

**1.** Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \cos^n(t)$. En utilisant le théorème de convergence dominée, montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

**2.** Soient $r > 0$ et $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-r, r[$. Montrer que $S$ est solution de $(E)$ sur $]-r, r[$

si et seulement si : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} a_n$.

**3.** Calculer le rayon de convergence de $\sum u_{2n} x^{2n}$, et montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n} x^{2n}$ est solution

de $(E)$ sur $]-1, 1[$.

**4.** Même question pour $g : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n+1} x^{2n+1}$.

## Exercice 28

Calculer l'intégrale $a_n = \displaystyle\int_0^1 t^n (1-t)^n\, dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis étudier sur $\mathbb{R}$ la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

## Exercice 29

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} \left( \frac{t}{1+t^2} \right)^n dt$. Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ ?

## Exercice 30

Soit la fonction $F$ définie par : $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ixt}}{\mathrm{ch}(t)} dt$.

Montrer que la série de Taylor de $F$ converge simplement vers $F$ sur un intervalle $]-a, a[$ avec $a > 0$. Préciser le rayon de convergence.

## Exercice 31

Soit $g : x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{1-x}$.

**a.** Montrer que $g$ est développable en série entière au voisinage de $0$. On donnera une expression de ce développement faisant intervenir $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

**b.** Déterminer le rayon de convergence $R$ de cette série entière.

**c.** Déterminer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n H_n}{n+1}$.

## Exercice 32

Montrer que $\cos(1)$ est irrationnel.

## Exercice 33

Soit pour $n \in \mathbb{N}$ : $I_n = \int_1^{e} \ln^n(x) dx$

**a.** Montrer que la suite $(I_n)$ converge. Quelle est sa limite ?

**b.** Nature des séries $\sum I_n^{\alpha}$ et $\sum (-1)^n I_n$.

**c.** Rayon de convergence et somme de $\sum I_n x^n$.

## Exercice 34

Soient $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de réels positifs, toutes deux convergentes, de limites respectives $a$ et $b$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \alpha_n u_{n+1} + \beta_n u_n .$$

Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$ est supérieur ou égal à la racine positive du polynôme $b X^2 + a X - 1$.

## Exercice 35

**1.** Déterminer l'ensemble de définition $D$ de $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n+in^2x}$.

**2.** $f$ est-elle continue sur $D$ ? $f$ est-elle de classe $C^{\infty}$ sur $D$ ?

**3.** $f$ est-elle développable en série entière en $0$ ?

## Exercice 36

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \llbracket 1, n \rrbracket$. On note $I_n$ le nombre d'applications $f : E \to E$ telles que $f \circ f = Id_E$,

et l'on pose $I_0 = 1$.

**1.** Montrer que pour tout $n \geq 2$, $I_n = I_{n-1} + (n-1) I_{n-2}$.

**2.** Donner une équation différentielle vérifiée par la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$.

**3.** En déduire une expression de $I_n$ (sous forme d'une somme finie).

## Exercice 37

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $B_n$ le nombre de partitions d'un ensemble $E$ à $n$ éléments, c'est-à-dire le nombre d'ensembles $\{A_1, ..., A_r\}$ d'éléments de $\mathcal{P}(E)$ non vides, deux à deux disjoints et dont la réunion est égale à $E$.

On notera que $B_0 = 1$.

**a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$.

**b.** Ecrire une fonction `bell(n)` donnant $(B_k)_{0 \leq k \leq n}$.

**c.** Montrer que le rayon de convergence de la série entière de terme général $\frac{B_n}{n!} x^n$ est strictement positif.

**d.** Soit $f : x \in ]-R, R[ \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$. Déterminer une équation différentielle dont $f$ est solution.

En déduire $f$, puis une expression de $B_n$.