Lycée Lakanal

2024 - 2025

PC

Feuille d'exercices

Intégration

Exercice 1

On rappelle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}$. Existence et éventuellement calcul des intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\,dx$ **2.** $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$ **3.** $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ln(\tan x)\,dx$ **4.** $L = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dt}{1-\cos t}$

Exercice 2

Prouver la convergence, puis, déterminer la valeur, de l'intégrale : $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)(t+3)(t+4)}$.

Exercice 3

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dt}{1-\cos t}$

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 dt$

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(t-\sqrt{t^2+1}\right) dt$

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1-\cos\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) dt$

5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt$

6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}\,dt$

7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{\ln t}\,dt$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

8. $\displaystyle\int_0^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$

Exercice 4

Discuter, en fonction des valeurs des paramètres α et β la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha}}{1+x^{\beta}}\,dx$

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1+t)^{\alpha}-t^{\alpha}}{t^{\beta}}\,dx$

Exercice 5

Etudier la convergence et, le cas échéant, calculer les intégrales :

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dt}{1+\sin t}$

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt$

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,e^{-\sqrt{t}}\,dt$

4. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+e^t}}\,dt$

Exercice 6

1. Etudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

2. En déduire la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t$ *(Intégrale de Fresnel)*.

Exercice 7

Donner une condition nécessaire et suffisante d'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{\alpha}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)\mathrm{d}x$ quand $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 8

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $\displaystyle f(x) = \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que l'on définit ainsi une application f de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

2. Prouver que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x \,.\, f(x) = 0$. *On remarquera que pour* $t \in [1, +\infty[$, *on a :* $t \le t^2$.

3. Montrer que l'intégrale $\displaystyle I = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge, et calculer I .

Exercice 9

On pose $\displaystyle I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que I converge.

2. A l'aide d'un changement de variable approprié, comparer les intégrales

$\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln t}{(1+t)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$. En déduire la valeur de I .

Exercice 10

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\displaystyle I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2 + 2t + 3\right)^n}$.

1. Etudier la convergence de l'intégrale I_n .

2. Montrer que : $\displaystyle\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2 + 2\right)^n}$.

3. Montrer que : $\displaystyle\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ I_{n+1} = \frac{2n-1}{4n} I_n$.

4. Calculer I_1, et en déduire l'expression de I_n en fonction de n, à l'aide de factorielles.

Exercice 11

Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $E(t)$ sa partie entière, et $\{t\}$ sa partie fractionnaire.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\mathcal{O}_n = \int_0^{+\infty} \frac{\{t\}}{t(t+n)}\,\mathrm{d}t$ est bien définie.

b. Trouver un équivalent simple de $\mathcal{O}_n$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 12

On considère l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2).\ln(1+t^2)} \end{cases}$.

1. Montrer que l'application f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$; déterminer la limite de f en 0.

2. Montrer que *f* est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et déterminer sa dérivée. En déduire les variations de f.

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 13

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $I(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\cos^2 t + x^2 \sin^2 t}}$, et $J(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{\cos^2 t + x^2 \sin^2 t}}$.

1. Calculer $J(x)$. *On pourra poser* $u = \sin t$.

2. Déterminer un équivalent simple de $J(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3. Majorer $|I(x) - J(x)|$, et en déduire que $I(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x}$.

Exercice 14

On définit $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{t+1}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que g est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ d'une équation différentielle à préciser.

3. En déduire une autre expression (intégrale) de g et un équivalent de g en $+\infty$.

Exercice 15

1. Montrer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$.

2. On pose pour $x > 0$: $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x^2(i+t^2)}}{i+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > 0$, $f'(x) = K\,\mathrm{e}^{-ix^2}$.

3. On admet : $K = -\sqrt{\pi}$. Montrer que : $\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$. En déduire $\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 16

Calcul de l'intégrale de Dirichlet

1. Etablir la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2nt)\,\mathrm{cotan}(t)\,\mathrm{d}t$ et $v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{t}\,\mathrm{d}t$.

2. Calculer u_1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $u_{n+1} - u_n$. En déduire la valeur de u_n.

3. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \left(u_n - v_n \right)$

4. Déduire des questions précédentes la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 17

Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t\left(1+t^2\right)}\,\mathrm{d}t$.

1. Donner l'ensemble de définition de F.

2. Montrer que F est de classe C^2 sur un intervalle à préciser.

3. Déterminer une équation différentielle vérifiée par F, et en déduire F.

Exercice 18

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f(x) = \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la fonction f est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, et calculer f'.

2. Montrer que : $\forall x \geq 1,\ 0 \leq f(x) \leq \mathrm{e}^{-x}$.

3. En déduire que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge, et calculer I.

Exercice 19

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+\ldots+t^n}$.

1. Justifier l'existence de cette intégrale.

2. Pour tout entier $n \geq 3$, justifier les égalités $I_{n-1} = \int_0^1 \frac{1-u}{1-u^n} u^{n-3}\,\mathrm{d}u$ et $I_{n-1} = \frac{1}{n^2} \int_0^1 \frac{1-s^{\frac{1}{n}}}{1-s} s^{-\frac{2}{n}}\,\mathrm{d}s$.

3. En déduire un équivalent simple de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 20

Les deux questions de cet exercice sont sans rapport entre elles

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$ en prouvant la convergence de la série et de l'intégrale.

2. Montrer la convergence et calculer la valeur de $I = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 21

Intégrales de Frullani

Soient f une fonction de classe C^1 sur $[0, +\infty[$, et a, b deux réels strictement positifs.

1. On suppose que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\,\mathrm{d}x = [\ell - f(0)] \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

2. On suppose que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ converge. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\,\mathrm{d}x = -f(0) \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

Exercice 22

On admet que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 23

Montrer, pour tout $x \in \left]0, +\infty\right[$: $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t/x)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{4} + \int_0^x \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 24

Soit $\varphi : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^{+\infty} \cos(xt)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est bien définie.

2. Montrer que $\int_0^{+\infty} \cos(xt)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{K}{1+x^2}$, avec K indépendant de x.

3. Montrer que φ est définie sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que φ est de classe C^1, et exprimer φ' à l'aide d'une intégrale. En déduire l'expression de φ.

Exercice 25

On pose pour tout $x > 0$: $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Montrer la convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+x}$ pour $x > 0$.

2.a. Pour $a > 0$ fixé, pour $x > a$ et $n \in \mathbb{N}$, montrer que : $\left|\frac{(-1)^n}{(n+x)^2}\right| \leq \frac{1}{(a+n)^2}$.

b. Montrer que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

3.a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x\,S(x) + x\,S(x+1) = 1$.

b. En déduire que $S(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x}$.

4. Préciser le tableau de variation de S.

5. Montrer que pour tout $x > 0$, $S(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 26

Soit une fonction de classe C^1 sur $\left[1, +\infty\right[$, telle que $\int_1^{+\infty} |f'(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

1. Soit $a \geq 1$. A l'aide du changement de variable $t = \mathrm{e}^x$, calculer $\int_0^a \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

2.a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = f(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t)\, f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

En déduire que $\left| \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n) \right| \leq \int_n^{n+1} \left| f'(t) \right| \mathrm{d}t$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$.

Etudier la nature de $\sum \left| v_n \right|$.

En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t \right)_{n \geq 1}$ converge.

4.a. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

b. En utilisant les mêmes procédés qu'auparavant, prouver que $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos\left(\sqrt{n}\right)}{n}$ converge.

5. Montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que : $\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} = \frac{1}{2}\left(\ln(n)\right)^2 + \ell + o(1)$.

Exercice 27

On pose pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $g(t) = \frac{\sin(t) - t}{t^2}$.

1. Montrer qu'après prolongement par continuité en 0, g est continue sur $\mathbb{R}$.

2. On pose pour $p \in \mathbb{N}$, $I_p = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^p(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Pour quelles valeurs de p l'intégrale I_p converge-t-elle ?

3.a. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sin^3(t) = \frac{3}{4}\sin(t) - \frac{1}{4}\sin(3t)$.

b. Montrer que pour tout $x > 0$, $\int_x^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{4}\int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

4. En déduire la valeur de I_3 .

Exercice 28

Soit une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et bornée. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \frac{n\, f(x)}{1 + n^2 x^2}$.

1. Etudier la convergence simple de la suite $\left(f_n \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 29

Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t}{n}}}{1 + t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 30

Calculer $\int_0^1 \ln(t) \ln(1-t)\,\mathrm{d}t$. On utilisera un développement en série.

Exercice 31

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.

2. La fonction f est-elle continue ? Est-elle de classe C^1 ?

3. Donner un équivalent de f en $+\infty$, puis en 0^+.

Exercice 32

Déterminer les fonctions $f \in C\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+^*\right)$, telles que f et f^2 sont intégrables sur $]0,1]$ et vérifient :

$$\forall x > 0 , \quad \frac{1}{2}\int_0^x f^2(t)\,dt = \frac{1}{x}\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2 .$$

Indication : si f est une telle fonction, on montrera que $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ appartient à $C^1\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+^*\right)$, et on cherchera une équation différentielle vérifiée par f.

Exercice 33

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les formules : $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ et $g(x) = \int_0^{\pi/4} e^{-\frac{x^2}{\cos^2 u}}\,du$.

a. Montrer que la fonction $f^2 + g$ est constante (poser $t = \tan u$ dans l'intégrale définissant $g(x)$ pourra s'avérer utile).

b. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.