PC - Lakanal

2024- 2025

Programme de colles s16 (probas)

Du 12 – 01 au 16 – 01

Dénombrement

Révisions de première année

Espaces probabilisés

I. Espaces probabilisables

Tribu (ou σ – algèbre), espace probabilisable. Vocabulaire : univers, évènement, évènement contraire, évènement impossible.

Propriétés de base des tribus.

II. Espaces probabilisés finis

Mesure de probabilité sur $\left(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)\right)$, Ω fini non vide ; propriétés : rappels de première année.

III. Espaces probabilisés quelconques

Mesure de probabilité sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$. Vocabulaire : événements quasi – impossibles, quasi – certains, propriété vraie presque sûrement, etc.

Premières propriétés : $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$, $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$, croissance pour l'inclusion, formule des quatre cardinaux pour les mesures de probabilité.

Caractérisation d'une probabilité sur un univers dénombrable :

Soient Ω un univers dénombrable, $\Omega = \left\{\omega_k\right\}_{k \in \mathbb{N}}$, et $\left(p_k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de réels

tels que $\begin{cases} \bullet & \forall k \in \mathbb{N},\ 0 \leq p_k \ (\leq 1) \\ \bullet\bullet & \sum\limits_{k \in \mathbb{N}} p_k \text{ converge et } \sum\limits_{k=0}^{+\infty} p_k = 1 \end{cases}$. Alors :

- il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $\left(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)\right)$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\left(\left\{\omega_k\right\}\right) = p_k$.

- •• $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(A) = \sum\limits_{\substack{k=0 \\ \omega_k \in A}}^{+\infty} p_k$.

IV. Systèmes complets ou quasi – complets d'événements

Définitions.

Propriété : si $\left(A_i\right)_{i \in \mathbb{N}}$ est un système complet ou quasi – complet d'événements, alors pour tout événement A,

$\sum\limits_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\left(A_i \cap A\right)$ converge, et $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(A_i \cap A\right) = \mathbb{P}(A)$.

Inégalité de Boole :

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un univers probabilisé, soit $\left(A_i\right)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite quelconque d'événements de $\mathcal{T}$. Alors si $\sum\limits_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\left(A_i\right)$ converge :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(A_i\right).$$

V. Théorèmes de continuité (ou de limite monotone) pour une probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un univers probabilisé. Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{T}$, on a :

- $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right)$.
- •• $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{N} A_n\right)$.

Cas d'une suite croissante ou décroissante au sens de l'inclusion.

VI. Probabilités conditionnelles

Définition. Propriété : $\mathbb{P}_A$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$. Conséquences immédiates.

VII. Indépendance

Indépendance de deux évènements ; caractérisation via les probas conditionnelles ; A et B sont indépendants ssi A et $\overline{A}$ le sont.

Indépendance mutuelle d'une famille d'évènements. L'indépendance deux à deux ne sert pas à grand – chose, et n'entraîne pas l'indépendance mutuelle.

VIII. Les trois formules reines des probabilités

Formule des probabilités composées.

Formule des probabilités totales :

Dans cette formule, on adopte la convention moche mais pratique, imposée par le programme :

on convient ici de poser $\mathbb{P}_{A_i}(B)\,\mathbb{P}(A_i) = 0$ lorsque A_i est négligeable.

Formule de Bayes.

Variables aléatoires réelles discrètes : le tout début

I. Variables aléatoires réelles discrètes

1. Variable aléatoire réelle discrète

2. Loi d'une variable aléatoire réelles discrète ; caractérisation

3. Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle discrète

Définition, premières propriétés. La fonction de répartition caractérise la loi d'une vard (admis)

Dans le cas d'une vard à valeurs entières, expression de la fonction de répartition à l'aide de la loi de probabilité, de la loi de probabilité à l'aide de la fonction de répartition ou de l'antirépartition.

minoration du rayon de convergence ; valeur en 1 . La série génératrice d'une var à valeurs dans $\mathbb{N}$ caractérise sa loi.

II. Lois discrètes usuelles de première année

Variable aléatoire quasi – certaine, lois de Bernoulli, uniformes discrètes, binomiales.

La semaine d'après

Variables aléatoires (suite).