PC - Lakanal

2024- 2025

Programme de colles s17 (probas, variables aléatoires)

Du 20 – 01 au 24 – 01

Dénombrement

Révisions de première année

Espaces probabilisés

I. Espaces probabilisables

Tribu (ou σ – algèbre), espace probabilisable. Vocabulaire : univers, évènement, évènement contraire, évènement impossible.

Propriétés de base des tribus.

II. Espaces probabilisés finis

Mesure de probabilité sur $\left(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)\right)$, Ω fini non vide ; propriétés : rappels de première année.

III. Espaces probabilisés quelconques

Mesure de probabilité sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$. Vocabulaire : événements quasi – impossibles,

quasi – certains, propriété vraie presque sûrement, etc.

Premières propriétés : $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$, $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$, croissance pour l'inclusion, formule des quatre cardinaux pour les mesures de probabilité.

Caractérisation d'une probabilité sur un univers dénombrable :

Soient Ω un univers dénombrable, $\Omega = \left\{\omega_k\right\}_{k \in \mathbb{N}}$, et $\left(p_k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de réels

tels que $\begin{cases} \bullet & \forall k \in \mathbb{N},\ 0 \leq p_k \ (\leq 1) \\ \bullet\bullet & \sum\limits_{k \in \mathbb{N}} p_k \text{ converge et } \sum\limits_{k=0}^{+\infty} p_k = 1 \end{cases}$. Alors :

- il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $\left(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)\right)$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\left(\left\{\omega_k\right\}\right) = p_k$.

•• $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(A) = \sum\limits_{\substack{k=0 \\ \omega_k \in A}}^{+\infty} p_k$.

IV. Systèmes complets ou quasi – complets d'événements

Définitions.

Propriété : si $\left(A_i\right)_{i \in \mathbb{N}}$ est un système complet ou quasi – complet d'événements, alors pour tout événement A,

$\sum\limits_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\left(A_i \cap A\right)$ converge, et $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(A_i \cap A\right) = \mathbb{P}(A)$.

Inégalité de Boole :

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un univers probabilisé, soit $\left(A_i\right)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite quelconque d'événements de $\mathcal{T}$. Alors si $\sum\limits_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\left(A_i\right)$

converge : $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(A_i\right)$.

V. Théorèmes de continuité (ou de limite monotone) pour une probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un univers probabilisé. Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{T}$, on a :

- $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right)$.   •• $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{N} A_n\right)$.

Cas d'une suite croissante ou décroissante au sens de l'inclusion.

VI. Probabilités conditionnelles

Définition. Propriété : $\mathbb{P}_A$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$. Conséquences immédiates.

VII. Indépendance

Indépendance de deux évènements ; caractérisation via les probas conditionnelles ; A et B sont indépendants ssi A et $\overline{A}$ le sont. Indépendance mutuelle d'une famille d'évènements. L'indépendance deux à deux ne sert pas à grand – chose, et n'entraîne pas l'indépendance mutuelle.

VIII. Les trois formules reines des probabilités

Formule des probabilités composées.

Formule des probabilités totales. Dans cette formule, on adopte la convention moche mais pratique, imposée par le programme : on convient ici de poser $\mathbb{P}_{A_i}(B)\,\mathbb{P}(A_i) = 0$ lorsque A_i est négligeable.

Formule de Bayes.

Variables aléatoires réelles discrètes : le tout début

I. Variables aléatoires réelles discrètes

1. Variable aléatoire réelle discrète

2. Loi d'une variable aléatoire réelles discrète ; caractérisation

3. Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle discrète

Définition, premières propriétés. La fonction de répartition caractérise la loi d'une vard (admis)

Dans le cas d'une vard à valeurs entières, expression de la fonction de répartition à l'aide de la loi de probabilité, de la loi de probabilité à l'aide de la fonction de répartition ou de l'antirépartition.

4. Série génératrice d'une variable aléatoire à valeurs entières

Définition. Convergence normale sur $[-1, 1]$; valeur en 1. La série génératrice d'une var à valeurs dans $\mathbb{N}$ caractérise sa loi (provisoirement admis). *Remarque : les séries entières n'ont pas encore été vues en cours.*

II. Lois discrètes usuelles

Variable aléatoire quasi – certaine, lois de Bernoulli, uniformes discrètes, binomiales.

Lois géométriques. Caractérisation par la propriété d'amnésie.

Lois de Poisson. Conditionnement Poisson / binomial (pas un résultat du cours, mais à savoir faire en pratique).

Approximation de lois binomiales par des lois de Poisson.

III. Indépendance ; théorèmes de stabilité

Admis : toute fonction d'une ou plusieurs variables aléatoires, est encore une variable aléatoire discrète.

Indépendance de deux vards. Famille de vards (mutuellement) indépendantes. Caractérisations.

Série génératrice d'une somme de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Théorèmes de stabilité des lois binomiales et de Poisson.

La semaine d'après

Variables aléatoires (au complet j'espère).