Programme de colles s19 (probas, variables aléatoires)

Du 03 – 02 au 07 – 02

Dénombrement

Révisions de première année

Espaces probabilisés

I. Espaces probabilisables

Tribu (ou σ – algèbre), espace probabilisable. Vocabulaire : univers, évènement, évènement contraire, évènement impossible.

Propriétés de base des tribus.

II. Espaces probabilisés finis

Mesure de probabilité sur $\left(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)\right)$, Ω fini non vide ; propriétés : rappels de première année.

III. Espaces probabilisés quelconques

Mesure de probabilité sur un espace probabilisable $\left(\Omega, \mathcal{T}\right)$. Vocabulaire : événements quasi – impossibles, quasi – certains, propriété vraie presque sûrement, etc.

Premières propriétés : $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$, $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$, croissance pour l'inclusion, formule des quatre cardinaux pour les mesures de probabilité.

Caractérisation d'une probabilité sur un univers dénombrable :

Soient Ω un univers dénombrable, $\Omega = \left\{\omega_k\right\}_{k \in \mathbb{N}}$, et $\left(p_k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de réels

tels que $\begin{cases} \bullet & \forall k \in \mathbb{N},\ 0 \le p_k \ (\le 1) \\ \bullet\bullet & \displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}} p_k \text{ converge et } \sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1 \end{cases}$. Alors :

- il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $\left(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)\right)$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\left(\left\{\omega_k\right\}\right) = p_k$.
- •• $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(A) = \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ \omega_k \in A}}^{+\infty} p_k$.

IV. Systèmes complets ou quasi – complets d'événements

Définitions.

Propriété : si $\left(A_i\right)_{i \in \mathbb{N}}$ est un système complet ou quasi – complet d'événements, alors pour tout événement A,

$\displaystyle\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\left(A_i \cap A\right)$ converge, et $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(A_i \cap A\right) = \mathbb{P}(A)$.

Inégalité de Boole :

Soit $\left(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P}\right)$ un univers probabilisé, soit $\left(A_i\right)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite quelconque d'événements de $\mathcal{T}$. Alors si $\displaystyle\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\left(A_i\right)$ converge :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \le \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(A_i\right).$$

V. Théorèmes de continuité (ou de limite monotone) pour une probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un univers probabilisé. Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{T}$, on a :

- $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \right) = \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n \right)$. •• $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \right) = \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{N} A_n \right)$.

Cas d'une suite croissante ou décroissante au sens de l'inclusion.

VI. Probabilités conditionnelles

Définition. Propriété : $\mathbb{P}_A$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$. Conséquences immédiates.

VII. Indépendance

Indépendance de deux évènements ; caractérisation via les probas conditionnelles ; A et B sont indépendants ssi A et $\overline{A}$ le sont.
Indépendance mutuelle d'une famille d'évènements. L'indépendance deux à deux ne sert pas à grand – chose, et n'entraîne pas l'indépendance mutuelle.

VIII. Les trois formules reines des probabilités

Formule des probabilités composées.
Formule des probabilités totales. Dans cette formule, on adopte la convention moche mais pratique, imposée par le programme : on convient ici de poser $\mathbb{P}_{A_i}(B)\,\mathbb{P}(A_i) = 0$ lorsque A_i est négligeable.

Formule de Bayes.

Variables aléatoires réelles discrètes : le tout début

I. Variables aléatoires réelles discrètes

1. Variable aléatoire réelle discrète

2. Loi d'une variable aléatoire réelles discrète ; caractérisation

3. Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle discrète

Définition, premières propriétés. La fonction de répartition caractérise la loi d'une vard (admis)
Dans le cas d'une vard à valeurs entières, expression de la fonction de répartition à l'aide de la loi de probabilité, de la loi de probabilité à l'aide de la fonction de répartition ou de l'antirépartition.

4. Série génératrice d'une variable aléatoire à valeurs entières

Définition. Convergence normale sur $[-1, 1]$; valeur en 1. La série génératrice d'une var à valeurs dans $\mathbb{N}$ caractérise sa loi (provisoirement admis). *Remarque : les séries entières n'ont pas encore été vues en cours.*

II. Lois discrètes usuelles

Variable aléatoire quasi – certaine, lois de Bernoulli, uniformes discrètes, binomiales.
Lois géométriques. Caractérisation par la propriété d'amnésie.
Lois de Poisson. Conditionnement Poisson / binomial (pas un résultat du cours, mais à savoir faire en pratique).
Approximation de lois binomiales par des lois de Poisson.

III. Indépendance ; théorèmes de stabilité

Admis : toute fonction d'une ou plusieurs variables aléatoires, est encore une variable aléatoire discrète.
Indépendance de deux vards. Famille de vards (mutuellement) indépendantes. Caractérisations.
Série génératrice d'une somme de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Théorèmes de stabilité des lois binomiales et de Poisson.

IV. Espérance

1. Définition, linéarité, propriété de croissance, formule du transfert.
2. Espérance et variance des lois usuelles.
3. Cas d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$:

a. Espérance et antirépartition : la var X à valeurs dans $\mathbb{N}$ admet une espérance ssi la série $\sum \mathbb{P}(X > n)$ converge, et dans ce cas : $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n)$.

b. Espérance et fonction génératrice (résultat admis) : La var X à valeurs dans $\mathbb{N}$ admet une espérance ssi sa fonction génératrice est dérivable en 1, et dans ce cas : $\mathbb{E}(X) = G_X'(1)$.

4. Moments : définition. Si X admet un moment d'ordre r, elle possède un moment de tout ordre inférieur.

5. Variance définition, premières propriétés. Pour une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, expression à l'aide de la fonction génératrice. écart – type ; variable aléatoire centrée, réduite.

6. Espérance et variance des lois usuelles.

V. Couples aléatoires discrets

Définition. Loi conjointe, lois marginales, lois conditionnelles. Caractérisation de l'indépendance via icelles.

Caractérisation des lois de couples aléatoires discrets. Obtention des lois marginales à l'aide de la loi du couple.

Formule du transfert pour l'espérance d'une fonction d'un couple de vards. Application à l'espérance d'un produit.

Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes.

Covariance, coefficient de corrélation : définition, propriétés. Indépendance et non – corrélation. Conséquence : variance d'une somme de vards indépendantes. Inégalités de Cauchy – Schwarz, et cas d'égalité.

VI. Inégalités probabilistes

Inégalités de Markov et de Bienaymé – Tchebycheff. Loi faible des grands nombres.

La semaine d'après

Algèbre bilinéaire