PC - Lakanal

2024- 2025

Programme de colles S21

du 03 – 03 au 07 – 03

Espaces préhilbertiens (révisions de première année)

Produit scalaire sur un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel ; norme et distance euclidiennes

Inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski

Vecteurs orthogonaux ; orthogonal d'une partie

Familles orthogonales, orthonormées. Théorème de Pythagore. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Supplémentaires orthogonaux.

Projecteurs orthogonaux ; distance à un sous – espace vectoriel de dimension finie

Espaces euclidiens

I BASES ORTHONORMÉES

1. **Travail en base orthonormale**

   Expression du produit scalaire en base orthonormée.

2. **Supplémentaire orthogonal**

   Existence du supplémentaire orthogonal de tout sev dans un espace euclidien.

3. Sommes directes orthogonales

II ISOMÉTRIES, MATRICES ORTHOGONALES

1. **Automorphismes orthogonaux ou isométries**

   Ce sont les endomorphismes qui conservent le produit scalaire ; l'endomorphisme f est une isométrie ssi l'image par f d'une b.o.n. est une b.o.n. ; c'est une isométrie ssi f conserve la norme.

   Composition d'isométries, passage à l'inverse ; groupe orthogonal d'un espace euclidien.

2. **Matrices orthogonales ; groupe orthogonal de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$**

   Définitions, propriétés et caractérisations des matrices orthogonales

3. **Automorphismes orthogonaux, matrices orthogonales, et bases orthonormées**

   Et formules de changement de base orthonormée.

4. **Eléments caractéristiques d'une isométrie, d'une matrice orthogonale**

   Déterminant d'une isométrie f. Si F est f – stable, alors $F^{\perp}$ l'est aussi. $\mathrm{Spec}(f) \subset \{-1, 1\}$.

5. **Symétries orthogonales ; réflexion**
6. **Orientations d'un espace euclidien**
7. **Cas de la dimension 2**

III ENDOMORPHISMES AUTOAJOINTS ET MATRICES SYMÉTRIQUES RÉELS

A DÉFINITIONS, PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

1. **Endomorphismes autoadjoints (ou symétriques) d'un espace euclidien**

   Définition ; espace vectoriel des endomorphismes autoadjoints de E. Propriétés immédiates.

2. **Matrices symétriques, antisymétriques**

   Rappels (définition ; dimension, bases de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$). $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel sur celui-ci.

3. **Lien entre ces deux notions**

Etant donnée une bon. de E, l'endomorphisme f est autoadjoint ssi sa matrice dans cette base est symétrique.

4. **Cas des symétries orthogonales et des projecteurs orthogonaux**

B RÉDUCTION

1. **Réalité du spectre**

   Les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle sont réelles. Le polynôme caractéristique d'une matrice symétrique réelle, d'un endomorphisme symétrique, est scindé sur $\mathbb{R}$.

2. **Orthogonalité des sous – espaces propres**

3. **Stabilité et passage à l'orthogonal**

   Le sev F est stable par l'endomorphisme symétrique f ssi $F^{\perp}$ l'est.

4. **Orthodiagonalisabilité des endomorphismes et matrices symétriques réels**

   Théorème spectral (version endomorphismes, version matricielle).

5. **Matrices symétriques positives, définies positives.**

   Et endomorphismes positifs, définis positifs d'un espace euclidien.

La semaine prochaine

Même programme