Lycée Lakanal

2025 – 2026

PC

Exercices de révisions de première année

Corrigés

Exercice 1

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $V_n = S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} u_k$, et $W_n = S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} u_k$.

Montrons que les suites $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} V_{n+1} - V_n &= \sum_{k=0}^{2n+2} u_k - \sum_{k=0}^{2n} u_k = u_{2n+2} + u_{2n+1} = (-1)^{2n+2}\left|u_{2n+2}\right| + (-1)^{2n+1}\left|u_{2n+1}\right| \\ &= \left|u_{2n+2}\right| - \left|u_{2n+1}\right|, \end{aligned}$$

  et la décroissance de la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ assure alors que $V_{n+1} - V_n \leq 0$: la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

- • De manière analogue, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} W_{n+1} - W_n &= \sum_{k=0}^{2n+3} u_k - \sum_{k=0}^{2n+1} u_k = u_{2n+3} + u_{2n+2} \\ &= (-1)^{2n+3}\left|u_{2n+3}\right| + (-1)^{2n+2}\left|u_{2n+2}\right| = -\left|u_{2n+3}\right| + \left|u_{2n+2}\right|, \end{aligned}$$

  et, par décroissance de $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$, il en résulte que $W_{n+1} - W_n \geq 0$, et ainsi $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

- • • $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_n - V_n = \sum_{k=0}^{2n+1} u_k - \sum_{k=0}^{2n} u_k = u_{2n+1}$. Or par hypothèse, $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

  On a donc également $\lim_{n \to +\infty} (W_n - V_n) = 0$.

  Ceci achève de prouver que les suites $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. Ces deux suites convergent donc vers la même limite, et ce sont par ailleurs les suites extraites des termes d'ordre respectivement pair et impair de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$; cette suite converge donc elle aussi vers cette limite commune, et la convergence de la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ équivaut à celle de la série $\sum u_n$.

2. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n \, |u_n|$;
- La suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\dfrac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ est évident.

D'après **1.**, la série $\sum u_n = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ est donc convergente, et on en conclut après un petit changement d'indice que

$\boxed{\text{la série harmonique alternée } \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{ converge}}$.

Exercice 2

1. Pour $x = 0$, le résultat demandé est évident. Supposons désormais x non nul. Soit $n \in \mathbb{N}$.

La fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$ est de classe C^{n+1} sur $\overleftrightarrow{[0, x]}$; la formule de Taylor avec reste intégral s'applique donc : on a

$$\mathrm{e}^x = f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Alors, $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$, d'où l'on déduit que :

$$\left| \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \left| \int_0^x \left| \frac{(x-t)^n}{n!} \mathrm{e}^t \right| \mathrm{d}t \right| \leq \int_0^{|x|} \frac{|2x|^n}{n!} \mathrm{e}^{|x|}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \frac{|2x|^{n+1}}{n!} \mathrm{e}^{|x|} :$$

toutes ces valeurs absolues s'expliquent par le fait que x peut être négatif.

Par croissances comparées, $\lim_{n \to +\infty} \frac{(2x)^{n+1}}{n!} \mathrm{e}^x = 0$; il en résulte que $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x$: ceci revient à dire que

$\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge, et que l'on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $S_n = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \frac{x^j}{i!\,j!}$. On remplace l'indice j par l'indice $k = i + j$ dans la

somme intérieure ; on obtient $S_n = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=i}^{n} \frac{x^{k-i}}{i!(k-i)!}$. On permute ensuite les deux sommes, et S_n devient

$S_n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{k-i}}{i!(k-i)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} x^{k-i} \right)$. La formule du binôme de Newton donne

alors $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x+1)^k}{k!}$, et l'on déduit enfin du résultat de **Q.1.** que $\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = \mathrm{e}^{x+1}}$.

Exercice 3

1. $\lim_{n \to +\infty} a_n = \lambda$ s'écrit : $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |a_n - \lambda| \leq \varepsilon$.

2. D'après **1.**, on peut choisir $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $k \geq N_1$, on ait $|a_k - \lambda| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour un tel entier $k \geq N_1$, et pour $n \geq N_1$, on a par inégalité triangulaire :

$$\left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k - \lambda \right| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |a_k - \lambda| = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N_1 - 1} |a_k - \lambda| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=N_1}^{n} |a_k - \lambda|.$$

Dans la somme $\sum_{k=N_1}^{n} |a_k - \lambda|$, tous les termes sont inférieurs ou égaux à $\frac{\varepsilon}{2}$, on a donc :

$$\left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k - \lambda \right| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N_1 - 1} |a_k - \lambda| + \frac{n - N_1 + 1}{n+1} \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N_1 - 1} |a_k - \lambda| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

3. La somme $\sum_{k=0}^{N_1-1} |a_k - \lambda|$ est indépendante de n, on a donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N_1-1} |a_k - \lambda| = 0$. Par suite :

$$\exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_2,\ \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N_1-1} |a_k - \lambda| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par suite, pour tout $\varepsilon > 0$, avec les notations ci – dessus et en posant $N_3 = \max(N_1, N_2)$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_3 \Rightarrow \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k - \lambda \right| \leq \varepsilon, \text{ soit } n \geq N_3 \Rightarrow |b_n - \lambda| \leq \varepsilon.$$

Ceci assure que $\boxed{\text{la suite } (b_n) \text{ converge vers } \lambda}$.

Exercice 4

1. On procède par récurrence sur n : pour tout entier $n \geq p$, l'hypothèse de récurrence est

$$\mathcal{H}(n) : \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Initialisation

On a bien $\mathcal{H}(p)$: $\sum_{k=p}^{p} \binom{k}{p} = \binom{p}{p} = 1 = \binom{p+1}{p+1}$.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{H}(n)$. Alors,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} \\
&= \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} && \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \binom{n+2}{p+1} && \text{d'après la formule de Pascal,}
\end{aligned}$$

d'où $\mathcal{H}(n+1)$.

Conclusion

On a $\mathcal{H}(p)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq p$, $\mathcal{H}(n) \Rightarrow \mathcal{H}(n+1)$, le principe du raisonnement par récurrence permet d'en conclure que, $\boxed{\text{pour tout entier } n \geq p,\ \mathcal{H}(n) \text{ est vérifiée}}$.

2. Pour tout $t \in \left]0, \pi\right[$ et pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a grâce aux formules d'Euler :

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{m} \cos(nt) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{m} \left(e^{int} + e^{-int}\right),$$

soit :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{m} \cos(nt) &= \frac{1}{2}\left(e^{i0t} + \sum_{n=1}^{m} e^{int} + \sum_{n=1}^{m} e^{-int}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i0t} + \sum_{n=1}^{m} e^{int} + \sum_{n=-m}^{-1} e^{int}\right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=-m}^{m} e^{int} = \frac{1}{2} \sum_{n=-m}^{m} \left(e^{it}\right)^n.
\end{aligned}$$

Comme $t \in \left]0, \pi\right[$, la somme géométrique $\sum_{n=-m}^{m} \left(e^{it}\right)^n$ est de raison différente de 1. On en déduit que

$$\sum_{n=-m}^{m}\left(e^{it}\right)^n = \underbrace{e^{-imt}}_{\text{premier terme}}\frac{\overbrace{1-e^{i(2m+1)t}}^{1\,-\,\text{raison}^{\text{nb de termes}}}}{\underbrace{1-e^{it}}_{1\,-\,\text{raison}}}.$$

On arrange classiquement l'expression obtenue en mettant en facteur, au numérateur et au dénominateur, les « demies exponentielles », ie. en écrivant que $\sum_{n=-m}^{m}\left(e^{it}\right)^n = e^{-imt}\frac{e^{i\frac{2m+1}{2}t}}{e^{i\frac{1}{2}t}}\frac{e^{-i\frac{2m+1}{2}t}-e^{i\frac{2m+1}{2}t}}{e^{-i\frac{1}{2}t}-e^{i\frac{1}{2}t}}$.

Il ne reste plus qu'à simplifier ; on obtient $\sum_{n=-m}^{m}\left(e^{it}\right)^n = \frac{-2i\sin\left(\frac{2m+1}{2}t\right)}{-2i\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}$,

et l'on a donc $\boxed{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{m}\cos(nt) = \frac{1}{2}\sum_{n=-m}^{m}\left(e^{it}\right)^n = \frac{\sin\left(\frac{2m+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}}$.

Exercice 5

1.a. La décroissance de f entraîne que pour tout $k \geq p$, $\forall\, t \in [k, k+1]$, $f(t) \leq f(k)$, et pour tout $k \geq p$, $\forall\, t \in [k-1, k]$, $f(k) \leq f(t)$.

En intégrant ces deux relations, on obtient $\forall\, k \geq p$, $\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq \int_k^{k+1} f(k)\,dt \quad (1)$ et

$\forall\, k \geq p+1$, $\int_{k-1}^{k} f(k)\,dt \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt \quad (2)$, soit $\forall\, k \geq p$, $\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq k \quad (1)$ et

$\forall\, k \geq p+1$, $k \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt \quad (2)$.

En sommant les inégalités (1) pour k variant de p jusqu'à n, il vient $\sum_{k=p}^{n}\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq \sum_{k=p}^{n} f(k)$,

d'où avec la relation de Chasles, $\int_p^{n+1} f(t)\,dt \leq \sum_{k=p}^{n} f(k)$.

De même, on somme les inégalités (2) pour k variant de $p+1$, à n, et l'on obtient ainsi

$\sum_{k=p+1}^{n} f(k) \leq \int_{p+1}^{n} f(t)\,dt$, donc $\sum_{k=p}^{n} f(k) \leq f(p) + \int_{p+1}^{n} f(t)\,dt$.

Finalement, on a bien l'encadrement : $\boxed{\forall\, n \geq p,\ \int_p^{n+1} f(t)\,dt \leq S_n \leq f(p) + \int_{p+1}^{n} f(t)\,dt}$.

b. Si l'intégrale $\int_p^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, et puisque f est à valeurs positives, on a pour tout $n \geq p$, $\int_p^{n} f(t)\,dt \leq \int_p^{+\infty} f(t)\,dt$,

ce que l'on peut réécrire sous la forme $\int_{p+1}^{n} f(t)\,dt \leq \int_p^{+\infty} f(t)\,dt - \int_p^{p+1} f(t)\,dt$.

Alors, d'après **1.a.** , on a pour tout $n \geq p$, $S_n \leq \underbrace{f(p) + \int_p^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_p^{p+1} f(t)\,\mathrm{d}t}_{\text{constante indépendante de } n}$.

$\sum f(k)$ à terme général positif, et la suite de ses sommes partielles est majorée, donc la série $\sum f(k)$ converge.

Si la série $\sum f(k)$ converge, la suite de ses sommes partielles S_n est majorée par $A = \sum_{k=p}^{+\infty} f(k)$.

On a pour tout $n \geq p$, $\int_p^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq S_n \leq A$; pour tout réel $p \leq X \leq n+1$, on a encore $\int_p^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq A$. Ceci

est valable pour tout entier $n \geq p$, donc finalement pour tout réel X supérieur ou égal à p, $\int_p^{X} f(t)\,\mathrm{d}t \leq A$. La fonction

$X \mapsto \int_p^{X} f(t)\,\mathrm{d}t$ est croissante (par positivité de f à nouveau), majorée, elle admet donc une limite finie en $+\infty$. Ainsi,

$\int_p^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

2.a. Analogue à **1.a.** : on somme l'inégalité (1) entre n et $+\infty$, puis l'on retire $f(n)$ à chacun des deux

membres ; on obtient ainsi $\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n) \leq R_n$.

D'un autre côté, en sommant l'inégalité (2) entre $n+1$ et $+\infty$, on a : $R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

b. Vu l'encadrement de **2.a.** , il suffit clairement d'avoir $f(n) \underset{+\infty}{=} o\left(\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

3.a. et **3.b.** La fonction f est continue, positive sur $[2, +\infty[$, décroissante sur cet intervalle.

Pour tout $n \geq 2$, pour tout $X \geq n$, $\int_n^{X} f(t)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{\ln(t)}\right]_n^X = \frac{1}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(X)}$, d'où

$\lim_{n \to +\infty} \int_n^{X} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\ln(n)}$; ceci prouve que pour tout $n \geq 2$, l'intégrale $\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et, en particulier (si

l'on choisit $p = 2$), $\int_p^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

De plus, $f(n) = \frac{1}{n \ln^2 n} = o\left(\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right)$ puisque $\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\ln n}$.

Alors, d'après **2.b.** , $\boxed{R_n \sim \frac{1}{\ln(n)}}$.

Exercice 6

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{4} x^2 + 1 \end{cases}$. La fonction f est polynomiale de degré 2, décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$. Son unique

point fixe est 2.

1. On a $f(0) = \frac{1}{4}$, $f(2) = 2$; f étant croissante et continue sur $[0, 2]$, on en déduit que

$f([0, 2]) = \left[\frac{1}{4}, 2\right] \subset [0, 2]$: l'intervalle $[0, 2]$ est stable par f. Comme $u_0 \in [0, 2]$, on en déduit, par une récurrence évidente, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 2]$.

La croissance de f sur $[0, 2]$ assure alors que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone ; elle est de plus bornée (puisqu'à valeurs dans $[0, 2]$), donc, d'après le théorème de la limite monotone, elle converge. Par continuité de f, la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un point fixe de f ; on en conclut que $\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } 2}$ ($(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc nécessairement croissante).

2. On prouve de la même façon qu'en **1.** que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]2, +\infty[$, et que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone. De plus, pour tout $x \in]2, +\infty[$, $f(x) - x = \frac{1}{4}(x - 2)^2 \geq 0$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante. Comme u_0 est strictement supérieur à l'unique limite finie possible de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, à savoir 2, il est impossible que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Alors, d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{\lim (u_n)_{n \in \mathbb{N}} = +\infty}$.

3. Si $u_0 \in [-2, 0[$, alors $u_1 \in [0, 2]$; on est ramené, à partir du rang 1, à la situation étudiée en **1.**, et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 2.

Si $u_1 \in]-\infty, -2[$, on est ramené à partir du rang 1 à la situation étudiée en **2.**, et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Exercice 7

1. La fonction f est dérivable, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\frac{2}{3}x$; on a pour tout réel x,

$$\varphi(x) = f(x) - x = \frac{1}{3}\left(4 - x^2 - 3x\right) = -\frac{1}{3}(x - 1)(x + 4).$$

Le tableau suivant donne les variations de f, ainsi que le signe de φ.

x	$-\infty$		-4		0		1		4		$+\infty$
$\varphi(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0			$-$	
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$				$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-4	↗	$\frac{4}{3}$	↘	1	↘	-4	↘	$-\infty$

2. • -4 est un point fixe de f ; par conséquent, si $u_0 = -4$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à -4.

Lorsque $u_0 = 4$, on a $u_1 = -4$, et l'on est ramené au cas précédent : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stationne à la valeur -4 à partir du rang 1.

• • Passons maintenant au cas plus constructif où $|u_0| > 4$

◦ Supposons d'abord $u_0 < -4$; l'étude des variations de f a montré que cette fonction est strictement croissante sur $]-\infty, -4[$, et que $f(-4) = -4$. Ceci assure que $f(]-\infty, -4[) \subset]-\infty, -4[$: $]-\infty, -4[$ est stable par f, et, puisque u_0 appartient à cet intervalle, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]-\infty, -4[$.

La fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - x$ étant négative sur $]-\infty, -4[$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Comme f est continue, les limites possibles de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont les points fixes de cette fonction, à savoir -4 et 1.

Mais $u_0 < -4$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, il est donc impossible que la suite converge vers l'un ou l'autre de ces points. On en conclut que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge, et alors le théorème de la limite monotone donne plus précisément

$\boxed{\lim (u_n)_{n \in \mathbb{N}} = -\infty}$.

◦◦ Supposons maintenant que $u_0 > 4$. La fonction f est décroissante sur $]4, +\infty[$ et $f(4) = -4$, par conséquent $u_1 = f(u_0)$ appartient à $]-\infty, -4[$. On est donc ramené à la situation précédente : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang 1 (en fait, elle l'est même dès le rang 0), et l'on a $\boxed{\lim (u_n)_{n \in \mathbb{N}} = -\infty}$.

3.a. On se réfère à nouveau au tableau de variation de f. Cette fonction est continue, strictement croissante sur $]-4\ ,\ 0]$ et strictement décroissante sur $[0, 4[$, avec $f(-4) = f(4) = -4$ et $f(0) = \dfrac{4}{3}$, on a donc $f(]-4, 4[) = \left]-4\ ,\ \dfrac{4}{3}\right]$. On en déduit que :

- $u_1 \in \left]-4\ ,\ \dfrac{4}{3}\right]$;
- • $f\left(\left]-4\ ,\ \dfrac{4}{3}\right]\right) \subset f(]-4, 4[) = \left]-4\ ,\ \dfrac{4}{3}\right]$: $\left]-4\ ,\ \dfrac{4}{3}\right]$ est stable par f, donc

$\boxed{\text{pour tout } n \geq 1,\ u_n \in \left]-4\ ,\ \dfrac{4}{3}\right]}$.

3.b. • La fonction f est continue, décroissante sur $\left[0\ ,\ \dfrac{4}{3}\right]$, on a donc $f\left(\left[0\ ,\ \dfrac{4}{3}\right]\right) = \left[f\left(\dfrac{4}{3}\right), f(0)\right]$, soit $f\left(\left[0\ ,\ \dfrac{4}{3}\right]\right) = \left[\dfrac{20}{27}, \dfrac{4}{3}\right]$. Ainsi, $f\left(\left[0\ ,\ \dfrac{4}{3}\right]\right)$ est inclus dans $\left[0\ ,\ \dfrac{4}{3}\right]$: $\left[0\ ,\ \dfrac{4}{3}\right]$ est stable par f, donc $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, \text{ si } u_k \in \left[0\ ,\ \dfrac{4}{3}\right], \text{ alors } \forall\ n \geq k\ ,\ u_n \in \left[0\ ,\ \dfrac{4}{3}\right]}$.

• • A fortiori, les suites $(u_{2n})_{n \geq k}$ et $(u_{2n+1})_{n \geq k}$ sont à valeurs dans $\left[0\ ,\ \dfrac{4}{3}\right]$. Elles vérifient les relation de récurrence $u_{2(n+1)} = f \circ f(u_{2n})$ et $u_{2(n+1)+1} = f \circ f(u_{2n+1})$, et, comme f est monotone sur l'intervalle (f – stable) $\left[0\ ,\ \dfrac{4}{3}\right]$, $f \circ f$ y est croissante. Il en découle que $(u_{2n})_{n \geq k}$ et $(u_{2n+1})_{n \geq k}$ sont monotones. En outre, ces deux suites sont bornées, elles sont donc toutes deux convergentes. Comme $f \circ f$ est continue, leurs limites respectives ne peuvent qu'en être un point fixe.

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f \circ f(x) = x &\Leftrightarrow \frac{1}{3}\left[4 - \left(\frac{1}{3}\left(4 - x^2\right)\right)^2\right] = x \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3}\left[4 - \left(\frac{1}{9}\left(16 - 8x^2 + x^4\right)\right)\right] = x \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{27}\left[20 + 8x^2 - x^4\right] = x \\ &\Leftrightarrow x^4 - 8x^2 + 27x - 20 = 0, \end{aligned}$$

puis, en utilisant le fait que les points fixes -4 et 1 de f sont aussi points fixes de $f \circ f$, on obtient

$$f \circ f(x) = x \Leftrightarrow (x-1)(x+4)\left(x^2 - 3x + 5\right) = 0 \Leftrightarrow x = -4 \text{ ou } x = 1,$$

car le polynôme $x^2 - 3x + 5$ n'admet pas de racine réelle.

Il n'est pas possible que $\left(u_{2n}\right)_{n \geq k}$ ou $\left(u_{2n+1}\right)_{n \geq k}$ tende vers -4, car elles sont à valeurs dans $\left[0, \frac{4}{3}\right]$.

Par conséquent, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(u_{2n}\right)_{n \geq k} = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(u_{2n+1}\right)_{n \geq k} = 1$, et l'on sait qu'alors également

$\boxed{\text{la suite } \left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } 1}$.

3.c. On sait déjà que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left]-4, \frac{4}{3}\right]$. Comme on suppose de plus que $\forall\, n,\ u_n \notin \left[0, \frac{4}{3}\right]$, on a pour tout n, $u_n \in \left]-4, 0\right[$. Sur cet intervalle, la fonction φ est positive, $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante, et en outre $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée (par 0), par conséquent elle converge. Sa limite est un point fixe de f, et appartient à $\left]-4, 0\right]$ (-4 est exclu de par la croissance de $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$). Mais f n'a pas de point fixe dans $\left]-4, 0\right]$, ceci est donc impossible.

On a donc montré, par l'absurde, qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_k \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$. On peut dès lors utiliser le résultat de la question **b.**, et conclure que $\boxed{\text{si } \left|u_0\right| < 4, \text{ alors } \left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } 1}$.

Exercice 8

Rappelons que la méthode de Newton, également appelée ***méthode des tangentes***, permet de déterminer une approximation d'une solution d'une équation du type $f(x) = 0$, en construisant une suite convergeant vers la solution de cette équation. Naturellement, la fonction f doit vérifier certaines conditions pour que cette méthode aboutisse, conditions que l'énoncé fournit évidemment.

1. La fonction f est continue, strictement monotone sur l'intervalle $[a, b]$, et $f(a)f(b) < 0$. D'après le ***théorème des valeurs intermédiaires strict***, $\boxed{\text{il existe donc un unique réel } c \in \left]a, b\right[\text{ tel que } f(c) = 0}$.

2.a. et **2.b.** • La fonction $g : x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ est bien définie, de classe C^1 sur $[a, c]$, et pour tout $x \in [a, c]$:

$$g'(x) = 1 - \frac{\left(f'(x)\right)^2 - f(x)f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2} > 0.$$

Il en résulte que g est continue, strictement croissante sur l'intervalle $[a, c]$; elle réalise donc une bijection de $[a, c]$ vers $\left[g(a), g(c)\right]$.

De plus : $g(c) = c - \frac{f(c)}{f'(c)} = c$ car $f(c) = 0$, et $g(a) = a - \frac{f(a)}{f'(a)} > a$ car $f(a) > 0$, et

$f'(a) > 0$. On a donc $g([a, c]) = [g(a), g(c)] \subset [a, c]$.

Maintenant :

- $u_0 = a$ appartient à l'intervalle $[a, c]$, sur lequel la fonction g est bien définie, et qui est stable

par g ; la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est donc bien définie, et à valeurs dans $[a, c]$ (on peut, si l'examinateur le demande, prouver cela par une récurrence facile).

- La fonction g étant croissante sur $[a, c]$, la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est monotone. Elle est évidemment bornée (pour tout

n, $a \leq u_n \leq c$), donc (d'après le ***théorème de la limite monotone***) $\boxed{(u_n)_{n \geq 0} \text{ est convergente}}$. Notons ℓ sa limite.

- La fonction g étant continue sur $[a, c]$, ℓ est un point fixe de g : $g(\ell) = \ell$, ce qui revient à dire que

$\ell = \ell - \dfrac{f(\ell)}{f'(\ell)}$, ou encore que $f(\ell) = 0$. Or on sait que c est le seul point de $[a, b]$ en lequel f s'annule. Par

conséquent, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \geq 0} \text{ converge vers } c}$.

3.a. Les fonctions $|f'|$ et f'' sont continues sur le segment $[a, b]$, elles y admettent donc un maximum et

un minimum : $m = \min\limits_{[a,b]} |f'|$ et $M = \max\limits_{[a,b]} f''$ sont bien définis.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad c - u_{n+1} = c - u_n + \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)} = \dfrac{f(u_n) + (c - u_n) f'(u_n)}{f'(u_n)}$.

La fonction f est de classe C^2 sur $[u_n, c]$, d'après la formule de Taylor – Laplace, on a donc :

$$f(c) = f(u_n) + (c - u_n) f'(u_n) + \int_{u_n}^{c} (c - t) f''(t)\, \mathrm{d}t .$$

Comme $f(c) = 0$, on obtient $c - u_{n+1} = -\dfrac{\displaystyle\int_{u_n}^{c} (c - t) f''(t)\, \mathrm{d}t}{f'(u_n)}$.

On retrouve ainsi le fait que $c - u_{n+1} \geq 0$, et on a : $\boxed{c - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{m} \displaystyle\int_{u_n}^{c} (c - t) M \,\mathrm{d}t \leq \dfrac{M}{2m} (c - u_n)^2}$.

3.b. Posons $q = \dfrac{M}{2m}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété $\mathcal{H}(n)$ par

$$\mathcal{H}(n) \Leftrightarrow 0 \leq c - u_n \leq \frac{1}{q} \left(q (c - u_0) \right)^{2^n} .$$

Initialisation

On a $0 \leq c - u_0 = \dfrac{1}{q} \left(q (c - u_0) \right)^{2^0}$, d'où $\mathcal{H}(0)$.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{H}(n)$. Alors d'après **a.**, $0 \leq c - u_{n+1} \leq q (c - u_n)^2$, d'où par hypothèse de

récurrence, $0 \leq c - u_{n+1} \leq q \left[\left(\dfrac{1}{q} \left(q (c - u_0) \right)^{2^n} \right) \right]^2$,

soit : $0 \leq c - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{q} \left(q (c - u_0) \right)^{2^{n+1}}$.

Conclusion

On a $\mathcal{H}(0)$ et la propriété $\mathcal{H}$ est héréditaire, d'où $\mathcal{H}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Cet encadrement assure que la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers c est très rapide : à partir d'un certain rang k, on a $a = q(c - u_0) < 1$, et alors la différence $c - u_n$ tend vers 0 plus vite que $K \cdot a^{2^n}$ (K constante).

Exercice 9

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f_n : x \mapsto x^n + x^2 + 2x - 1$ est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $\left[f_n(0), \lim_{x \to +\infty} f_n(x) \right[$, c'est – à – dire vers $I = [-1, +\infty[$. Comme 0 appartient à I, le théorème de la bijection assure qu'il existe un unique élément x_n de $\mathbb{R}_+$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

2. On remarque que l'on a $f_n\left(\frac{1}{2}\right) > 0 = f_n(x_n)$; par croissance de f_n, on en déduit que $x_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc bornée. Il en résulte aussi que :

$$f_n(x_{n+1}) = (x_{n+1})^n + (x_{n+1})^2 + 2x_{n+1} - 1 \geq (x_{n+1})^{n+1} + (x_{n+1})^2 + 2x_{n+1} - 1,$$

soit : $f_n(x_{n+1}) \geq f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$. Mais alors $f_n(x_{n+1}) \geq 0 = f_n(x_n)$; en utilisant à nouveau la croissance de f_n, il en ressort que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite croissante. Alors, d'après le théorème de la limite monotone, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Soit ℓ sa limite.

En passant à la limite dans l'égalité $f_n(x_n) = 0$, il vient : $\ell^2 + 2\ell - 1 = 0$ ($\lim (x_n)^n = 0$ puisque x_n appartient à $\left[0, \frac{1}{2}\right]$). Les racines de l'équation $X^2 + 2X - 1 = 0$ sont $-1 \pm \sqrt{2}$, et $-1 - \sqrt{2}$ est strictement négatif, donc

$\boxed{\ell = -1 + \sqrt{2}}$.

3. D'après **2.**, on peut poser $x_n = \ell - \varepsilon_n$, où (ε_n) est une suite de limite nulle.

D'autre part, l'égalité $f_n(x_n) = 0$ peut s'écrire : $(x_n)^n = 1 - 2x_n - (x_n)^2$, ou encore, :

$$(\ell - \varepsilon_n)^n = 1 - 2(\ell - \varepsilon_n) - (\ell - \varepsilon_n)^2,$$

soit : $(\ell - \varepsilon_n)^n = (2\varepsilon_n + 2\ell\varepsilon_n - \varepsilon_n^2) + \underbrace{(1 - 2\ell - \ell^2)}_{=0}$.

On a donc $(\ell - \varepsilon_n)^n \sim 2(1 + \ell)\varepsilon_n$. Comme $0 < \ell - \varepsilon_n < \frac{1}{2}$ à partir d'un certain rang, ceci prouve déjà : $\varepsilon_n = O\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

On réinjecte dans l'égalité $(\ell - \varepsilon_n)^n \sim 2(1 + \ell)\varepsilon_n$. On obtient $2(1 + \ell)\varepsilon_n = \left(\ell + O\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)^n$, puis en passant sous forme exponentielle,

$$\begin{aligned} 2(1 + \ell)\varepsilon_n &= \exp\left(n \ln\left(\ell + O\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)\right) = \exp\left(n \ln \ell + n \ln\left(1 + O\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(n \ln \ell + \frac{n}{2^n}\right) = \exp(n \ln \ell + O(1)) \end{aligned}$$

On en déduit que $2(1 + \ell)\varepsilon_n \sim \exp(n \ln \ell) = \ell^n$, d'où $\varepsilon_n \sim \dfrac{\ell^n}{2(1 + \ell)}$.

Exercice 10

1. La fonction f_n est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim\limits_{-\infty} f_n = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f_n = +\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires strict, il existe donc un unique réel u_n tel que $f_n\left(u_n\right) = 0$.

De plus, puisque $f_n(0) < 0$, la croissance de f_n assure que $u_n > 0$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n\left(u_{n+1}\right) - f_{n+1}\left(u_{n+1}\right) = \mathrm{e}^{n u_{n+1}} - \mathrm{e}^{(n+1) u_{n+1}}$ est strictement négatif, car $u_{n+1} > 0$.

Mais $f_{n+1}\left(u_{n+1}\right) = 0$; on a donc $f_n\left(u_{n+1}\right) < 0$, soit $f_n\left(u_{n+1}\right) < f_n\left(u_n\right)$, et, par croissance de f_n, on en déduit que $u_{n+1} < u_n$: la suite $\left(u_n\right)$ est (strictement) décroissante.

3. On a montré que $\left(u_n\right)$ est décroissante, à valeurs positives, elle est donc convergente. Notons ℓ sa limite. Si l'on suppose $\ell > 0$, on obtient par passage à la limite dans l'égalité $\mathrm{e}^{n u_n} + u_n - 2 = 0$ une contradiction immédiate. Par conséquent, $\left(u_n\right)$ converge vers 0.

4. L'égalité $\mathrm{e}^{n u_n} + u_n - 2 = 0$ donne bien $n u_n = \ln\left(2 - u_n\right) \qquad (\mathbf{1})$.

4.a. Comme $\lim u_n = 0$, on en tire : $n u_n = \ln\left(2 + \circ(1)\right)$, d'où $u_n \sim \dfrac{\ln 2}{n}$.

4.b. On sait maintenant que $u_n = \dfrac{\ln 2}{n} + \dfrac{v_n}{n}$, avec $\lim v_n = 0$. En remplaçant dans $(\mathbf{1})$, il vient :

$\ln 2 + v_n = \ln\left(2 - \dfrac{\ln 2}{n} + \circ\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = \ln\left(2\left(1 - \dfrac{\ln 2}{2n} + \circ\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\right)$, d'où

$\ln 2 + v_n = \ln 2 + \ln\left(1 - \dfrac{\ln 2}{2n} + \circ\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = \ln 2 - \dfrac{\ln 2}{2n} + \circ\left(\dfrac{1}{n}\right)$, et $v_n = -\dfrac{\ln 2}{2n} + \circ\left(\dfrac{1}{n}\right)$. On a donc bien

$u_n = \dfrac{\ln(2)}{n} - \dfrac{\ln(2)}{2n^2} + \circ\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

4.c. On recommence : $u_n = \dfrac{\ln(2)}{n} - \dfrac{\ln(2)}{2n^2} + \dfrac{w_n}{n^2}$, avec $\lim v_n = 0$, et l'on remplace dans $(\mathbf{1})$, ce qui donne :

$$\ln 2 - \frac{\ln 2}{n} + \frac{w_n}{n} = \ln\left(2\left(1 - \frac{\ln 2}{2n} + \frac{\ln 2}{2n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right).$$

Il en résulte que $-\dfrac{\ln 2}{n} + \dfrac{w_n}{n} = \ln\left(1 - \dfrac{\ln 2}{2n} + \dfrac{\ln 2}{2n^2} + \circ\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = \left(-\dfrac{\ln 2}{2n} + \dfrac{\ln 2}{2n^2}\right) - \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{\ln 2}{2n}\right)^2 + \circ\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,

puis en simplifiant, $w_n = \dfrac{4\ln 2 - \ln^2 2}{8n}$, et ainsi $u_n = \dfrac{\ln(2)}{n} - \dfrac{\ln(2)}{2n^2} + \dfrac{4\ln 2 - \ln^2 2}{8n^3} + \circ\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

Exercice 11*

1. • Montrons déjà que $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(v_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones, de monotonies contraires.

Procédons par récurrence ; pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété $\mathcal{H}(n)$ par

$$\mathcal{H}(n) \Leftrightarrow u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n.$$

Initialisation

On a $v_0 - u_0 = a\left(\cos(\theta) - 1\right) = \dfrac{a}{2}\cos^2\theta \geq 0$.

On en déduit que $\quad u_1 = \dfrac{u_0 + v_0}{2} \geq \dfrac{u_0 + u_0}{2} = u_0$,

et que $v_1 = \sqrt{u_1 v_0} = \sqrt{\left(\dfrac{u_0 + v_0}{2}\right) v_0} \leq \sqrt{\left(\dfrac{v_0 + v_0}{2}\right) v_0} = v_0$.

Il en résulte aussi que $v_1 = \sqrt{u_1 v_0} = \sqrt{u_1 \dfrac{v_0 + v_0}{2}} \geq \sqrt{u_1 \dfrac{u_0 + v_0}{2}} = u_1$, et l'on a donc bien

$$\mathcal{H}(n) \Leftrightarrow v_0 \leq v_1 \leq u_1 \leq u_0 \quad .$$

Hérédité

Elle se prouve de façon analogue à l'initialisation :

Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons $\mathcal{H}(n)$.

Alors $v_{n+1} \leq u_{n+1}$, donc $\dfrac{v_{n+1} + u_{n+1}}{2} \leq u_{n+1}$, soit $u_{n+2} \leq u_{n+1}$.

De plus, $v_{n+2} = \sqrt{u_{n+2} v_{n+1}} = \sqrt{\left(\dfrac{u_{n+1} + v_{n+1}}{2}\right) v_{n+1}} \geq \sqrt{\left(\dfrac{v_{n+1} + v_{n+1}}{2}\right) v_{n+1}} = v_{n+1}$,

et enfin $v_{n+2} = \sqrt{u_{n+2} v_{n+1}} = \sqrt{u_{n+2} \dfrac{v_{n+1} + v_{n+1}}{2}} \leq \sqrt{u_{n+2} \dfrac{u_{n+1} + v_{n+1}}{2}} = u_{n+2}$,

on a donc bien $\mathcal{H}(n+1)$: $v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq u_{n+2} \leq u_{n+2}$.

Conclusion

On a $\mathcal{H}(n)$, et $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{H}(n) \Rightarrow \mathcal{H}(n+1)$, on en conclut d'après le principe du raisonnement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{H}(n)$.

En particulier, pour tout n, $v_n \leq v_{n+1}$ et $u_n \geq u_{n+1}$: les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bien monotones et de monotonies contraires.

•• Pour prouver que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes, il nous reste à prouver que $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$. Pour cela, commençons par noter que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, minorée par v_0, et que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, majorée par u_0 ; d'après le théorème de la limite monotone, ces deux suites sont donc convergentes ; notons ℓ et ℓ' leurs limites respectives.

On a $\lim u_{n+1} = \ell$, soit $\lim \dfrac{u_n + v_n}{2} = \ell$; il en résulte que $\dfrac{\ell + \ell'}{2} = \ell$, d'où $\ell = \ell'$, et ceci achève de prouver que $\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont adjacentes}}$.

2.a. On a $u_1 = \dfrac{u_0 + v_0}{2} = \dfrac{a\cos(\theta) + a}{2}$, donc : $\boxed{u_1 = a\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}$.

On en déduit que $v_1 = \sqrt{u_1 v_0} = \sqrt{a^2 \cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)} = \boxed{a\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}$.

2.b. On procède à nouveau par récurrence ; soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ la propriété définie par :

$$\mathcal{P}(n) \Leftrightarrow \left(v_n = a\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) \text{ et } u_n = v_n \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right).$$

Initialisation

Le produit vide $\prod_{k=1}^{0} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$ vaut 1 par convention, donc $v_0 = a \prod_{k=1}^{0} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$. L'égalité $u_0 = a\cos(\theta) = v_0 \cos\left(\frac{\theta}{2^0}\right)$ est une évidence.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$.

- D'après $\mathcal{P}(n)$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} = v_n \dfrac{\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) + 1}{2}$, d'où $u_{n+1} = v_n \cos^2\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$.

•• On en déduit que $v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n} = \sqrt{v_n^2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)} = v_n \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$; comme par hypothèse de récurrence, $v_n = a \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$, on en tire $v_{n+1} = a \prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$.

••• On a montré que $u_{n+1} = v_n \cos^2\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$ et $v_{n+1} = v_n \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$, on a donc $u_{n+1} = v_{n+1} \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$. Ceci achève d'établir $\mathcal{P}(n+1)$, et met du même coup fin à la récurrence.

2.c. Une nouvelle récurrence :

On a bien $v_0 = a = a \dfrac{\sin(\theta)}{2^0 \sin\left(\frac{\theta}{2^0}\right)}$; si l'on suppose que, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, $v_n = a \dfrac{\sin(\theta)}{2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$, alors :

$$v_{n+1} = v_n \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) = a \frac{\sin(\theta)\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)}{2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}, \text{ d'où } v_{n+1} = a \frac{\sin(\theta)\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)}{2^n\left(2\sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)\right)}.$$

On a donc bien $v_{n+1} = a \dfrac{\sin(\theta)}{2^{n+1} \sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)}$, et ceci achève la récurrence.

2.d. D'après le résultat de la question précédente : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = a \dfrac{\sin(\theta)}{2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$.

On a donc $v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} a \dfrac{\sin(\theta)}{2^n \frac{\theta}{2^n}} = a \dfrac{\sin(\theta)}{\theta}$.

On en conclut que $\boxed{\text{la limite commune de } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est égale à } a\dfrac{\sin(\theta)}{\theta}}$.

3. Lorsque $b \geq a$, on pose $b = a\,\mathrm{ch}(\theta)$. On montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = a \dfrac{\mathrm{sh}(\theta)}{2^n \mathrm{sh}\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$, et $u_n = v_n \mathrm{ch}\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ (toutes les preuves sont analogues à celles qui précèdent), puis que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $a\dfrac{\mathrm{sh}(\theta)}{\theta}$.

Exercice 12

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sin(u_{n-1}) \in [-1, 1]$. Soit $f : x \mapsto \sin x$. On a $f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [0, 1] \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ est stable par f et $u_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. De plus, f est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ce qui assure que (u_n) est monotone. Le théorème de la limite monotone prouve alors que (u_n) converge. Comme f est continue, sa limite ℓ est un point fixe de f. On étudie $g : x \mapsto \sin x - x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et l'on voit que g est strictement décroissante, et ne s'annule qu'en 0. On en déduit que (u_n) converge vers 0.

On peut préciser si l'on veut que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 en décroissant.

2. Imprécision dans l'énoncé : on suppose désormais que $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, car, si $u_0 = 0$, la suite (u_n) est nulle, et le résultat demandé clairement faux.

On a $v_n = \left(\sin(u_n)\right)^{\alpha} - (u_n)^{\alpha}$. Comme (u_n) tend vers 0, on peut utiliser un développement limité de sinus au voisinage de 0, et écrire que $v_n = \left(u_n - \frac{u_n^3}{6} + o\left(u_n^3\right)\right)^{\alpha} - (u_n)^{\alpha}$. Alors :

$$v_n = (u_n)^{\alpha}\left[\left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o\left(u_n^2\right)\right)^{\alpha} - 1\right] = (u_n)^{\alpha}\left[1 - \frac{\alpha u_n^2}{6} + o\left(u_n^2\right) - 1\right] = -\frac{\alpha (u_n)^{\alpha+2}}{6} + o\left(u_n^{\alpha+2}\right).$$

On en déduit que (v_n) admet une limite finie non nulle si et seulement si $\alpha = -2$, et que dans ce cas cette limite est égale à $\frac{1}{3}$.

3. Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty}\left[(u_{n+1})^{-2} - (u_n)^{-2}\right] = \frac{1}{3}$, le lemme de Cesàro assure que l'on a aussi $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left((u_{k+1})^{-2} - (u_k)^{-2}\right) = \frac{1}{3}$ (le lemme de Cesàro étant hors-programme, il faut en principe le redémontrer, mais on l'admet ici : cf. l'exercice **3.** du poly pour une démonstration).

On a alors par télescopage, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\left((u_n)^{-2} - (u_0)^{-2}\right) = \frac{1}{3}$. Il en résulte que $(u_n)^{-2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n}{3}$, d'où

$$\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}}.$$

Exercice 13

1. On a

$$u_n = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times (2n-1) \times (2n)}{\left(2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2n)\right)^2} = \frac{(2n)!}{\left((2 \times 1) \times (2 \times 2) \times (2 \times 3) \times \ldots \times (2 \times n)\right)^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n)^2},$$

d'où $\boxed{u_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est strictement positif, et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}}{\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}} = \frac{2^{2n}}{2^{2(n+1)}} \frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2} \frac{(2(n+1))!}{(2n)!}$$

$$= \frac{1}{4} \frac{1}{(n+1)^2}(2n+2)(2n+1) = \frac{1}{2}\frac{2n+1}{n+1} < 1.$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante ; elle est de plus minorée (par 0), donc, d'après le théorème de la limite monotone,

$\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge}}$.

3. A nouveau, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs strictement positives. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n+2}{n+1}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^2 = \frac{n+2}{n+1}\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2 = \frac{4n^3+12n^2+9n+2}{4n^3+12n^2+12n+4} < 1 .$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est elle aussi décroissante et minorée, donc convergente.

On en déduit, bien sûr, que la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est égale à 0.

4. Rebelote : la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs strictement positives à partir du rang 1, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{n+1}{n}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^2 = \frac{n+1}{n}\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2 = \frac{4n^3+8n^2+5n+1}{4n^3+8n^2+4n} > 1 :$$

la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n > w_n$, on en déduit que $\alpha > 0$.

On a alors $(n+1)u_n^2 \sim \alpha$, d'où $u_n \sim \sqrt{\dfrac{\alpha}{n}}$.

Remarque

On montrera dans le cours sur le Chapitre ***Séries*** la formule de Stirling : $n! \underset{n \to +\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.

En utilisant la relation $u_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$, on en déduit facilement que $u_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

Exercice 14

1. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x \ln x}$ est strictement décroissante sur $[2, +\infty[$.

2. On a pour tout $k \geq 2$: $\dfrac{1}{k \ln k} = \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{k \ln k} \geq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t \ln t}$. On somme et on utilise la relation de Chasles ; on obtient :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k} \geq \int_2^{n+1} \frac{dt}{t \ln t}, \text{ d'où } \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k} \geq \big[\ln(\ln(t))\big]_2^{n+1} = \ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(2)}\right).$$

3. Erreur d'indice dans l'énoncé, on va montrer que pour tout $n \geq 3$, $u_n - u_{n-1} \geq \dfrac{u_1}{n \ln n}$.

La relation $u_n = u_{n-1} + \dfrac{u_{n-2}}{n \ln n}$, valable pour tout $n \geq 2$, prouve par une récurrence facile que pour tout n, $u_n > 0$, puis

que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 1. On a pour tout $n \geq 3$, $u_n - u_{n-1} = \dfrac{u_{n-2}}{n \ln n}$, d'où d'après ce qui précède : $u_n - u_{n-1} \geq \dfrac{u_1}{n \ln n}$.

On en déduit que pour tout $n \geq 3$, $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \left(u_k - u_{k-1}\right) \geq u_1 \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k \ln k}$, d'où par télescopage, $\displaystyle u_n - u_2 \geq u_1 \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k \ln k}$.

On en déduit que $\displaystyle u_n \geq u_2 + u_1 \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k} \right) - \frac{u_1}{2 \ln 2}$, puis d'après **2.** : $\displaystyle u_n \geq u_2 + u_1 \ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(2)} \right) - \frac{u_1}{2 \ln 2}$. Il en résulte que $\lim u_n = +\infty$.

4. On prouve de même que si $u_0 < 0$ et $u_1 < 0$: pour tout $n \geq 3$, $\displaystyle u_n \leq u_2 + u_1 \ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(2)} \right) - \frac{u_1}{2 \ln 2}$,

et $\lim u_n = -\infty$.

Exercice 15

L'idée est ici de se ramener à des séries usuelles (exponentielles, géométriques ou géométriques dérivées).

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle \frac{2n + 3^n}{4^{n+1}} = 2n\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{8} n \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

La série géométrique dérivée $\displaystyle\sum_{n \geq 0} n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$, de raison $\frac{1}{4}$, converge car $\left|\frac{1}{4}\right| < 1$, et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2} = \frac{16}{9}$$

(le terme d'indice 0 est nul).

La série géométrique $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ converge car sa raison est strictement inférieure à 1 en valeur absolue, et l'on a

$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = 4$. Par linéarité, la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{2n + 3^n}{4^{n+1}}$ est donc convergente, et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n + 3^n}{4^{n+1}} = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{4}{9} + 1 = \boxed{\frac{13}{9}}.$$

2. Une formule d'Euler donne pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle \frac{\cos(n)\, e^{-n}}{n!} = \frac{e^{in} + e^{in}}{2} \frac{\cos(n)\, e^{-n}}{n!} = \frac{1}{2} \frac{\left(e^{i+1}\right)^n}{n!} + \frac{1}{2} \frac{\left(e^{-i+1}\right)^n}{n!}$.

Les séries exponentielles $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{\left(e^{i+1}\right)^n}{n!}$ et $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{\left(e^{-i+1}\right)^n}{n!}$ sont convergentes, de sommes respectives :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(e^{i+1}\right)^n}{n!} = \exp\left(e^{i+1}\right) = \exp\left(e \cos(1) + i\, e \sin(1)\right) = e^{e \cos(1)}\left(\cos\left(e \sin(1)\right) + i \sin\left(e \sin(1)\right)\right)$$

et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(e^{-i+1}\right)^n}{n!} = e^{e \cos(1)}\left(\cos\left(e \sin(1)\right) - i \sin\left(e \sin(1)\right)\right)$ (même technique).

Par linéarité, la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{\cos(n)\, e^{-n}}{n!}$ est donc elle aussi convergente, et

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n)\, e^{-n}}{n!} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(e^{i+1}\right)^n}{n!} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(e^{-i+1}\right)^n}{n!} = e^{e \cos(1)} \cos\left(e \sin(1)\right)}.$$

4. On transforme de manière à se ramener à des séries géométriques dérivées. Par exemple (mais d'autres transformations sont possibles),

$$\begin{aligned} n^3 &= (n+1)(n+2)(n+3) - 6n^2 - 11n - 6 \\ &= (n+1)(n+2)(n+3) - 6(n+1)(n+2) + 7n + 6 \\ &= (n+1)(n+2)(n+3) - 6(n+1)(n+2) + 7(n+1) - 1, \end{aligned}$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{n^3}{2^n} = (n+1)(n+2)(n+3)\left(\frac{1}{2}\right)^n - 6(n+1)(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^n + 7(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Les séries géométriques dérivée troisième, dérivée seconde, dérivée tout court et la série géométrique intervenant ici sont toutes convergentes, car de raison strictement inférieure à 1 en valeur absolue. Par linéarité, $\sum_{n \geq 0} \frac{n^3}{2^n}$ converge, et :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{2^n} &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)(n+3)\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) - 6\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \\ &\quad + 7\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) - \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \\ &= \left(\frac{3!}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^4}\right) - 6\left(\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}\right) + 7\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}\right) - \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) \\ &= 96 - 96 + 28 - 2, \end{aligned}$$

donc $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{2^n} = 26}$.

5. $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!}$ converge (série exponentielle) et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \mathrm{e}^{-1}$.

6. $\boxed{\sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{n!} \text{ diverge grossièrement}}$: en effet, $\lim \left(\frac{n^n}{n!}\right) = +\infty$ par croissance comparée.

7. Pour tout $N \geq 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} \frac{(n+1)^2}{n!} &= \sum_{n=1}^{N} \frac{n^2 + 2n + 1}{n!} = \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{(n-1)!} + 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{n+1}{n!} + 2\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} + \left(\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}\right) - 1\right) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} + 2\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} + \left(\left(\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!}\right) - 1 + \frac{1}{N!}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{n}{n!} + 4\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} + \left(\frac{1}{N!} - 1\right) = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{(n-1)!} + 4\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} + \left(\frac{1}{N!} - 1\right) \\ &= \sum_{n=0}^{N-2} \frac{1}{n!} + 4\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} + \left(\frac{1}{N!} - 1\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} + 4\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} + \left(\frac{1}{N!} - 1 - \frac{1}{(N-1)!}\right) \\ &= 5\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} + \left(\frac{1}{N!} - 1 - \frac{1}{(N-1)!}\right) \end{aligned}$$

On a $\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}$, et il est clair que $\lim_{N \to +\infty} \left(\frac{1}{N!} - 1 - \frac{1}{(N-1)!}\right) = 0$.

Donc $\boxed{\text{la série } \sum_{n \geq 1} \frac{(n+1)^2}{n!} \text{ converge, et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} = 5\mathrm{e} - 1}$.

Exercice 16

Toutes ces sommes sont télescopiques...

1. C'est l'exemple de base. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n+1} \quad \text{changement d'indice dans la deuxième somme} \\
&= 1 - \frac{1}{N+1}.
\end{aligned}$$

Il est alors immédiat que $\lim\limits_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. Par définition de la convergence d'une série, ceci signifie que

$\boxed{\text{la série } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} \text{ converge, et que } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1}$.

2. Pour tout $N \geq 2$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{N} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{n^2 - 1}{n^2}\right) &= \sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\right) \\
&= \sum_{n=2}^{N} \ln(n+1) + \sum_{n=2}^{N} \ln(n-1) - 2\sum_{n=2}^{N} \ln n.
\end{aligned}$$

En changeant d'indice dans chacune des deux premières sommes, on obtient

$$\sum_{n=2}^{N} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n=3}^{N+1} \ln n + \sum_{n=1}^{N-1} \ln n - 2\sum_{n=2}^{N} \ln n,$$

d'où, par télescopage : $\sum_{n=2}^{N} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln(N+1) - \ln N - 2\ln 2 + \ln 1 = \ln\left(\frac{N+1}{N}\right) - 2\ln 2$.

On a $\lim\limits_{N \to +\infty} \ln\left(\frac{N+1}{N}\right) = 0$, donc $\lim\limits_{N \to +\infty} \sum_{n=2}^{N} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = -2\ln 2$:

$\boxed{\text{La série } \sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \text{ converge, et } \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = -2\ln 2}$.

3. Pour tout $N \geq 1$, $\sum_{n=1}^{N} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right) = 2\sum_{n=1}^{N} \ln(n+1) - \sum_{n=1}^{N} \ln n - \sum_{n=1}^{N} \ln(n+2)$.

On fait encore des changements d'indices, par exemple dans la première et la troisième somme, et l'on trouve :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right) &= 2\sum_{n=2}^{N+1} \ln n - \sum_{n=1}^{N} \ln n - \sum_{n=3}^{N+2} \ln n \\
&= \ln 2 + \ln(N+1) - \ln(N+2) \\
&= \ln 2 + \ln\left(\frac{N+1}{N+2}\right).
\end{aligned}$$

$\lim\limits_{N \to +\infty} \ln\left(\frac{N+1}{N+2}\right) = 0$, donc :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right) \text{ converge, et } \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right) = \ln 2}.$$

4. Pour tout $N \geq 1$: si l'on écrit la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n+(-1)^{n+1}}$ sous forme développée, on

s'aperçoit que l'on a affaire à une somme partielle de la série harmonique alternée...

Et on conclut que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+(-1)^{n+1}} = \ln 2$ (cf. exercice **24.** et **25.** pour le calcul de la somme de la série harmonique alternée).

5. La technique est archi – classique :

On a $\dfrac{4n-2}{n(n^2-4)} = \dfrac{4n-2}{n(n-2)(n+2)}$, et l'on cherche donc a, b et c tels que pour tout $n \geq 3$,

$\dfrac{4n-2}{n(n^2-4)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+2} + \dfrac{c}{n-2}$. On obtient après calculs :

$$\frac{4n-2}{n(n^2-4)} = \frac{1}{2}\frac{1}{n} - \frac{5}{4}\frac{1}{n+2} + \frac{3}{4}\frac{1}{n-2},$$

et on en déduit que pour tout $N \geq 3$:

$$\sum_{n=3}^{N} \frac{4n-2}{n(n^2-4)} = \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n} - \frac{5}{4}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n+2} + \frac{3}{4}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n-2}.$$

Il ne reste plus qu'à achever le télescopage :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=3}^{N} \frac{4n-2}{n(n^2-4)} &= \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n} - \frac{5}{4}\sum_{n=5}^{N+2}\frac{1}{n} + \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{N-2}\frac{1}{n} \quad \text{changements d'indices}\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\left(\sum_{n=5}^{N-2}\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N}\right)\\
&\quad - \frac{5}{4}\left(\left(\sum_{n=5}^{N-2}\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N}+\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}\right)\\
&\quad + \frac{3}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\left(\sum_{n=5}^{N-2}\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= \frac{8+6+36+18+12+9}{48} - \frac{3}{4}\frac{1}{N-1} - \frac{3}{4}\frac{1}{N} - \frac{5}{4}\frac{1}{N+1} - \frac{5}{4}\frac{1}{N+2},
\end{aligned}$$

donc $\displaystyle\sum_{n=3}^{N} \frac{4n-2}{n(n^2-4)} \underset{N\to+\infty}{=} \frac{89}{48} + \circ(1)$. Bref, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=3}^{N} \frac{4n-2}{n(n^2-4)} = \frac{89}{48}$, donc

$$\boxed{\sum_{n\geq 3} \frac{4n-2}{n(n^2-4)} \text{ converge, et } \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{4n-2}{n(n^2-4)} = \frac{89}{48}}.$$

Exercice 17

1. Cette série est à terme général positif et majoré par celui de la série $\sum \dfrac{1}{3^n}$.

La série $\sum \dfrac{1}{3^n}$ étant convergente (comme série géométrique de raison strictement inférieure à 1 en valeur absolue) :

$$\boxed{\text{La série } \sum \frac{1}{3^n+n} \text{ est elle aussi convergente}}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{2^n}{e^{\sqrt{n}}} = e^{n\ln 2 - \sqrt{n}}$. Or Par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(n\ln 2 - \sqrt{n}\right) = +\infty$, et l'on a donc également $\lim_{n \to +\infty} \left(e^{n \ln 2 - \sqrt{n}} \right) = +\infty$. Ainsi, le terme général de la série $\sum \frac{2^n}{e^{\sqrt{n}}}$ ne tend pas vers 0 , et il

s'ensuit que $\boxed{\sum \frac{2^n}{e^{\sqrt{n}}} \text{ est une série grossièrement divergente, donc divergente}}$.

4. • Première idée, déterminer un équivalent simple du terme général de cette série, et s'en servir pour conclure :

On a $\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}$, et l'on sait que la série (de Riemann) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge. $\sum \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ est donc elle aussi divergente.

• • Deuxième possibilité : multiplier par la quantité conjuguée transforme la somme partielle $S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ en somme télescopique, somme que l'on peut donc calculer.

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n+1-n} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n},$$

et il s'ensuit que pour tout $N \in \mathbb{N}$: $S_N = \sum_{n=0}^{N} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right) = \sqrt{N+1} - 1$.

On retrouve à nouveau $\lim_{N \to +\infty} S_N = +\infty$, et on en conclut comme précédemment que $\boxed{\text{la série } \sum \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \text{ diverge}}$.

5. $\frac{\ln n}{n!} = o\left(\frac{n}{n!} \right) = o\left(\frac{1}{(n-1)!} \right)$ et la série exponentielle $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n-1)!}$ converge absolument, donc $\sum \frac{\ln n}{n!}$ converge.

6. $(\ln n)^n e^{-n} = \left(\frac{\ln n}{n} \right)^n \to +\infty$: la série $\sum (\ln n)^n e^{-n}$ diverge grossièrement.

7. $\frac{n}{n^2+1} \sim \frac{1}{n}$ et la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente, de terme général positif, donc $\sum \frac{n}{n^2+1}$ diverge.

Exercice 18*

1. Posons $u_n = \ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)$. On a

$$\begin{aligned} u_n &= \ln(n) + a \ln\left(n\left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) + b \ln\left(n\left(1 + \frac{2}{n} \right) \right) \\ &= (1+a+b)\ln(n) + a \ln\left(1 + \frac{1}{n} \right) + b \ln\left(1 + \frac{2}{n} \right) \\ &= (1+a+b)\ln(n) + \frac{a+2b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2} \right) \end{aligned}$$

et alors :

- Si $1+a+b \neq 0$, $u_n \sim (1+a+b)\ln(n)$ et donc ne tend pas vers 0 : la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Si $1+a+b = 0$ et $a+2b \neq 0$, $u_n \sim \frac{a+2b}{n}$, et, par comparaison à une série de Riemann, $\sum u_n$ diverge encore.
- Si $1+a+b = 0$ et $a+2b = 0$, $u_n = O\left(\frac{1}{n^2} \right)$. A nouveau par comparaison à une série de Riemann, $\sum u_n$ converge.

Ainsi, $\sum u_n$ converge si et seulement si $\begin{cases} a+b = -1 \\ a+2b = 0 \end{cases}$, soit si et seulement si $\boxed{\begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases}}$.

2. Maintenant, $\sum u_n$ est la série $\sum_{n \geq 1} \left(\ln(n) - 2\ln(n+1) + \ln(n+2) \right)$, que l'on peut espérer fortement télescopique.

Pour tout $N \geq 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \left(\ln(n) - 2\ln(n+1) + \ln(n+2) \right) &= \sum_{n=1}^{N} \ln(n) - 2\sum_{n=1}^{N} \ln(n+1) + \sum_{n=1}^{N} \ln(n+2) \\ &= \sum_{n=1}^{N} \ln(n) - 2\sum_{n=2}^{N+1} \ln(n) + \sum_{n=3}^{N+2} \ln(n) \\ &= -2\ln(N+1) + \ln(N+2) + \ln(N+1) - \ln 2 \\ &= -2\ln\left(\frac{N+2}{N+1}\right) - \ln 2 .\end{aligned}$$

Il en résulte que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \lim_{N \to +\infty} \left(-2\ln\left(\frac{N+2}{N+1}\right) - \ln 2 \right) = \boxed{-\ln 2}$.

Exercice 19

1. Pour tout $N \geq 1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{N+1}$ (somme télescopique), d'où

$\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = 1$: la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n(n+1)}$ converge, et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

2. On utilise le théorème spécial des séries alternées (point **3.** rappelé en préambule de cette section) :

la suite $\displaystyle\left(\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \right)_{n \geq 1}$ est décroissante et tend vers 0, donc $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$ converge.

3. $\displaystyle\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} \right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} + O\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} \right)^2 = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} + O\left(\frac{1}{n^2} \right)$, donc :

- Par comparaison à une série de Riemann, $\displaystyle\sum \left(\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} \right) - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} \right)$ converge (absolument).

- • D'après **2.**, $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$ converge. On en déduit que $\displaystyle\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} \right)$ converge.

Exercice 20

1. On a $\displaystyle u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{1 + \frac{a}{2n} + \frac{1}{n^2}} \right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{a}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \right) = \sin\left(\frac{\pi a}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2} \right) \right) = \frac{\pi a}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2} \right)$.

Comme $\displaystyle\sum \frac{1}{n}$ est à terme général de signe constant et divergente, on en déduit que $\sum u_n$ diverge.

2. Par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^4 e^{-x} = 0$, d'où $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}} = 0$. Il en résulte que $\displaystyle v_n = o\left(\frac{1}{n^2} \right)$.

La série de Riemann $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$ converge absolument, il en est donc de même pour $\sum v_n$.

3. $\displaystyle w_n = \exp\left(n^2 \ln\left(1 - \frac{1}{n} \right) \right) = \exp\left(n^2 \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \right) \underset{n \to +\infty}{\sim} e^{-\frac{1}{2}} e^{-n}$.

La série géométrique $\sum e^{-n}$ converge absolument, donc $\sum w_n$ converge.

Exercice 21

1. $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+k}}=\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}\right)=\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$, où f est la fonction $t\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$.

f est continue sur le segment $[0,1]$, et l'on reconnaît en $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ une somme de Riemann. On sait alors que

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=2\left(\sqrt{2}-1\right)$. On en déduit : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}\sim 2\sqrt{n}\left(\sqrt{2}-1\right)$.

2. La fonction $t\mapsto\dfrac{1}{t\ln t}$ est décroissante sur $[2,+\infty[$, donc pour tout $k\geq 2$:

$\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{(k+1)\ln(k+1)}\leq\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}\leq\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{k\ln k}$, soit : $\displaystyle\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)}\leq\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}\leq\frac{1}{k\ln k}$.

En sommant ces inégalités pour $k\in\{2,\ldots,n\}$, on obtient : $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+1}\frac{1}{k\ln k}\leq\int_2^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}\leq\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}$,

d'où $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}-\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{n\ln n}\leq\int_2^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}\leq\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}$.

On a $\displaystyle\int_2^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}=\ln(\ln(n+1))-\ln(\ln(2))\sim\ln(n)$; l'encadrement précédent donne donc

$\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}+o(\ln(\ln n))\leq\ln(\ln n)+o(\ln(\ln n))\leq\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}$, et ainsi $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}\sim\ln(\ln n)$

Exercice 22

Dans les deux cas, on cherche à appliquer le théorème spécial des séries alternées (point **3.** rappelé en préambule de cette section).

1. On a : $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{n}}\ln(n)}=\sum_{n\geq 2}(-1)^n u_n$, avec $u_n=\dfrac{1}{n^{\frac{1}{n}}\ln(n)}$. Il est clair que $u_n\underset{n+\infty}{\to}0$. D'autre part, u_n est à

valeurs strictement positives, et pour tout $n\geq 2$:

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n}&=\frac{n^{\frac{1}{n}}\ln(n)}{(n+1)^{\frac{1}{n+1}}\ln(n+1)}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}}n^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}\frac{\ln(n)}{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}\\
&=\mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}n^{\frac{1}{n(n+1)}}\frac{\ln(n)}{\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\\
&=\mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}\mathrm{e}^{\frac{\ln(n)}{n(n+1)}}\frac{1}{1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}}\\
&=\mathrm{e}^{O\left(\frac{1}{n^2}\right)}\mathrm{e}^{\frac{\ln(n)}{n(n+1)}}\frac{1}{1+\frac{1}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)}=\mathrm{e}^{o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)}\left(1-\frac{1}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right)\\
&=1-\frac{1}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\underset{n\to+\infty}{<}1
\end{aligned}$$

On en déduit que $\left(u_n\right)$ est décroissante à partir d'un certain rang. Le théorème spécial des séries alternées permet d'en déduire que $\sum_{n\geq 2} \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{n}} \ln(n)}$ converge.

2. On a ici : $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}} = \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{1 + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}}} = \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}} \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}}$, d'où :

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}} = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{2 n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}} - \frac{1}{2 n^{\frac{3\alpha}{2}}} + o\left(\frac{1}{2 n^{\frac{3\alpha}{2}}}\right). \text{ Or :}$$

- $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$ est de la forme $\sum (-1)^n u_n$, avec $\left(u_n\right) = \left(\dfrac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)$ décroissante et tendant vers 0. D'après le théorème spécial des séries alternées, $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$ converge.

- $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}} - \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}} \sim \dfrac{1}{2 n^{\frac{3\alpha}{2}}}$; la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{2 n^{\frac{3\alpha}{2}}}$ est de signe constant, et converge si et seulement si $\alpha > \dfrac{2}{3}$.

  Ainsi, $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$ converge si et seulement si $\alpha > \dfrac{2}{3}$.

Exercice 23

Tout le monde aura remarqué que les intégrales I_p sont des intégrales de Wallis ?

1.a. Evident en étudiant la fonction $t \mapsto t - \dfrac{\pi}{2} \sin(t)$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ (on peut également raisonner par convexité de la fonction sinus sur ce même intervalle si on connaît, mais ce n'est pas tellement au programme).

1.b. $0 \leq J_p$ est clair. D'autre part, d'après l'inégalité prouvée en question précédente :

$$J_p \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} \sin t\right)^2 \cos^{2p}(t)\, \mathrm{d}t, \text{ d'où } J_p \leq \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos^2 t\right) \cos^{2p}(t)\, \mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{4} \left(I_p - I_{p+1}\right).$$

1.c. Dans $I_{p+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \cos^{2p+1}(t)\, \mathrm{d}t$, on intègre par parties : les fonctions $u : t \mapsto \sin(t)$, $v : t \mapsto \cos^{2p+1}(t)$ sont de classe C^1 sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, avec pour tout t, $u'(t) = \cos(t)$ et $v'(t) = -(2p+1) \cos^{2p}(t) \sin(t)$.

On a $I_{p+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(t) v(t)\, \mathrm{d}t$; l'intégration par parties donne :

$$I_{p+1} = \left[u(t) v(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(t) v'(t)\, \mathrm{d}t = 0 + (2p+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}(t) \sin^2(t)\, \mathrm{d}t,$$

d'où $I_{p+1} = (2p+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}(t)\left(1-\cos^2(t)\right)\mathrm{d}t = (2p+1)I_p - (2p+2)I_{p+1}$.

Il en résulte que $I_{p+1} = \dfrac{2p+1}{2p+2} I_p$.

1.d. Il est clair que $I_p > 0$. D'après **1.b.**, $0 \le \dfrac{J_p}{I_p} \le \dfrac{\pi^2}{4}\left(1 - \dfrac{I_{p+1}}{I_p}\right)$, puis d'après **1.c.**, $0 \le \dfrac{J_p}{I_p} \le \dfrac{\pi^2}{4}\,\dfrac{1}{2p+2}$.

Par encadrement, $\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{J_p}{I_p} = 0$.

2.a. • Intégrons par parties dans $I_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,.\cos^{2p}(t)\,\mathrm{d}t$:

les fonctions $u : t \mapsto \cos^{2p}(t)$, $v : t \mapsto t$ sont de classe C^1, et pour tout t :

$$u'(t) = -(2p)\cos^{2p-1}(t)\sin(t),\ v'(t) = 1.$$

L'intégration par parties est licite, et l'on obtient:

$$\begin{aligned} I_{p+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} v'(t)\,u(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[v(t)\,u(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} v(t)\,u'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[t\cos^{2p}(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (2p)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos^{2p-1}(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (2p)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos^{2p-1}(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t\ . \end{aligned}$$

•• On intègre à nouveau par parties :

les fonctions $a : t \mapsto \cos^{2p-1}(t)\sin(t)$, $b : t \mapsto \dfrac{t^2}{2}$ sont elles aussi de classe C^1 ;

pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $b'(t) = t$, et :

$$\begin{aligned} a'(t) &= \cos^{2p}(t) - (2p-1)\cos^{2p-2}(t)\sin^2(t) \\ &= \cos^{2p}(t) - (2p-1)\cos^{2p-2}(t)\left(1-\cos^2(t)\right) \\ &= (2p)\cos^{2p}(t) - (2p-1)\cos^{2p-2}(t). \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} I_p &= p\Big[t^2\cos^{2p}(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - p\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\left((2p)\cos^{2p}(t) - (2p-1)\cos^{2p-2}(t)\right)\mathrm{d}t \\ &= p(2p-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos^{2p-2}(t)\,\mathrm{d}t - 2p^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos^{2p}(t)\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

soit : $\boxed{I_p = p\left[(2p-1)J_{p-1} - 2pJ_p\right]}$.

2.b. On déduit de ce qui précède que pour tout $p \ge 1$: $(2p-1)\dfrac{J_{p-1}}{I_p} - 2p\dfrac{J_p}{I_p} = \dfrac{1}{p}$.

Or d'après **1.c.**, $I_p = \dfrac{2p-1}{2p} I_{p-1}$.

Il en résulte que $(2p-1)\dfrac{J_{p-1}}{\dfrac{2p-1}{2p}I_{p-1}} - 2p\dfrac{J_p}{I_p} = \dfrac{1}{p}$, soit $2p\left(\dfrac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \dfrac{J_p}{I_p}\right) = \dfrac{1}{p}$, et l'on a donc bien

$\dfrac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \dfrac{J_p}{I_p} = \dfrac{1}{2p^2}$.

2.c. On a $\boxed{I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}, \text{ et } J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24}}$.

2.d. D'après **b.**, pour tout $N \geq 1$: $\displaystyle\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p^2} = 2\sum_{p=1}^{N}\left(\frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{J_p}{I_p}\right)$, et la somme figurant dans le membre de droite étant télescopique, il vient $\displaystyle\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p^2} = 2\left(\frac{J_0}{I_0} - \frac{J_N}{I_N}\right)$.

On a $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{J_N}{I_N} = 0$ d'après **1.c.**, donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p^2} = 2\frac{J_0}{I_0}$. C'est dire que la série $\displaystyle S = \sum_{p\geq 1} \frac{1}{p^2}$ converge, et que sa somme est $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = 2\frac{J_0}{I_0}$.

On en conclut d'après **c.** que $\boxed{\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = 2\frac{\frac{\pi^3}{24}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{6}}$.

Exercice 24

1. On a $\displaystyle a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, où f est la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$. Comme f est continue sur le segment $[0,1]$, le théorème du cours concernant les sommes de Riemann s'applique : $\displaystyle\lim a_n = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$, ce qui donne explicitement :

$$\lim a_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \left[\ln(1+t)\right]_0^1 = \ln 2 .$$

2.a. On peut montrer le résultat demandé par récurrence (c'est même le plus simple, et, puisque le résultat demandé est donné, le plus naturel). Ceci ne présentant pas de difficulté particulière, voyons ici une preuve plus directe :

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ impair}}}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2\sum_{\substack{k=1\\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j},$$

d'où $\displaystyle S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = a_n$.

2.b. D'après le résultat des questions précédentes, $\lim S_{2n} = \lim a_n = \ln 2$. Comme $S_{2n+1} - S_{2n} = \dfrac{1}{2n+1} \to 0$, on a aussi $\lim S_{2n+1} = \ln 2$; les suites extraites des termes d'indices pairs et impairs de la suite $\left(S_n\right)$ convergent vers $\ln 2$, donc $\left(S_n\right)$ converge elle aussi vers $\ln 2$. Ainsi, la série harmonique alternée $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge, et l'on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2 .$$

Exercice 25

1. On va appliquer la formule de Taylor – Laplace (c'est-à-dire la formule de Taylor avec reste intégral) à la fonction $f : t \mapsto \ln(1+t)$ entre 0 et 1. La fonction f est de classe C^{∞}, avec $f(0) = 0$ et pour tout $k \geq 1$,

$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$. La formule de Taylor- Laplace donne :

$$f(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}}{k!}(1-0)^k + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{n+1}(t)\,\mathrm{d}t \text{, soit :}$$

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^n}(-1)^n\,\mathrm{d}t .$$

On en déduit que $\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2\right| = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^n}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

2. Il est immédiat d'après ce qui précède que $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$: la série harmonique alternée $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge, et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$.

Exercice 26

1. La fonction $f_\alpha : x \mapsto \frac{1}{x \ln^\alpha x}$ est définie, de classe C^1 sur $]1, +\infty[$, et pour tout x appartenant à cet intervalle :

$f_\alpha'(x) = -\frac{\ln^\alpha x + \alpha \ln^{\alpha-1} x}{\left(x \ln^\alpha x\right)^2} = -\frac{\ln x + \alpha}{x \ln^{\alpha+1} x}$. On en déduit que f_α est décroissante sur $\left[B_\alpha, +\infty\right[$, où $B_\alpha = \max\left(1, \mathrm{e}^{-\alpha}\right)$.

On applique alors le critère de comparaison série / intégrale :

Posons $A_\alpha = \lfloor B_\alpha \rfloor + 2$. Pour tout $n \geq A_\alpha$, $[n-1, n]$ et $[n, n+1]$ sont inclus dans $\left[B_\alpha, +\infty\right[$, donc :

pour tout $t \in [n, n+1]$, $\frac{1}{t \ln^\alpha t} \leq \frac{1}{n \ln^\alpha n}$, et pour tout $t \in [n-1, n]$, $\frac{1}{n \ln^\alpha n} \leq \frac{1}{t \ln^\alpha t}$.

On en déduit, par croissance de l'opérateur intégral, que

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{t \ln^\alpha t}\,\mathrm{d}t \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n \ln^\alpha n}\,\mathrm{d}t, \quad \text{soit : } \int_n^{n+1} \frac{1}{t \ln^\alpha t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n \ln^\alpha n}$$

$$\text{et : } \int_{n-1}^{n} \frac{1}{n \ln^\alpha n}\,\mathrm{d}t \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t \ln^\alpha t}\,\mathrm{d}t, \quad \text{soit : } \frac{1}{n \ln^\alpha n} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t \ln^\alpha t}\,\mathrm{d}t,$$

d'où la double inégalité : $\boxed{\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t \ln^\alpha t}\,dt \le u_n \le \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t \ln^\alpha t}\,dt}$.

2. Si $\alpha = 1$, $\displaystyle\int_2^X \frac{1}{x \ln x}\,dx = \left[\ln(\ln x)\right]_2^X = \ln\left(\frac{\ln X}{2}\right) \underset{X \to +\infty}{\to} +\infty$

Lorsque $\alpha \ne 1$, $\displaystyle\int_2^X \frac{1}{x \ln^\alpha x}\,dx = \left[\frac{1}{1-\alpha} \ln^{1-\alpha}(x)\right]_2^X = \frac{1}{1-\alpha}\left(\ln^{1-\alpha}(X) - \ln^{1-\alpha}(2)\right)$ donc :

Si $\alpha < 1$, $\displaystyle\lim_{X \to +\infty} \int_2^X \frac{1}{x \ln^\alpha x}\,dx = +\infty$, et lorsque $\alpha > 1$, $\displaystyle\lim_{X \to +\infty} \int_2^X \frac{1}{x \ln^\alpha x}\,dx = \frac{1}{(\alpha - 1)\ln^{\alpha-1}(2)}$.

Finalement, $X \mapsto \displaystyle\int_2^X \frac{1}{x \ln^\alpha x}\,dx$ admet une limite finie lorsque X tend vers $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.

3. • Si $\alpha > 1$:

D'après **1.** , on a pour tout $n \ge A_\alpha$: $\displaystyle\frac{1}{n \ln^\alpha n} \le \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t \ln^\alpha t}\,dt$, donc pour tout $N \ge A_\alpha$:

$$\sum_{n=A_\alpha}^{N} \frac{1}{n \ln^\alpha n} \le \sum_{n=A_\alpha}^{N} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t \ln^\alpha t}\,dt\ .$$

On transforme cette inégalité en utilisant la relation de Chasles. On obtient $\displaystyle\sum_{n=A_\alpha}^{N} \frac{1}{n \ln^\alpha n} \le \int_{A_\alpha - 1}^{N} \frac{1}{t \ln^\alpha t}\,dt$

d'où, d'après ce qui précède : $\displaystyle\sum_{n=A_\alpha}^{N} \frac{1}{n \ln^\alpha n} \le \frac{1}{\alpha - 1}\,\frac{1}{\ln^{\alpha-1} b}$.

La série $\displaystyle\sum_{n \ge A_\alpha} \frac{1}{n \ln^\alpha n}$ est à terme général positif, et la suite de ses sommes partielles $\displaystyle\left(\sum_{n=A_\alpha}^{N} \frac{1}{n \ln^\alpha n}\right)_{n \ge A_\alpha}$ est majorée

par $\displaystyle\frac{1}{\alpha - 1}\,\frac{1}{\ln^{\alpha-1} b}$, donc la série $\displaystyle\sum_{n \ge A_\alpha} \frac{1}{n \ln^\alpha n}$ converge. $\boxed{\text{La série } \displaystyle\sum_{n \ge 2} \frac{1}{n \ln^\alpha n} \text{ est donc elle aussi convergente}}$.

•• Si $\alpha \le 1$:

D'après **1.** , on a pour tout $n \ge A_\alpha$: $\displaystyle\frac{1}{n \ln^\alpha n} \ge \int_{n}^{n+1} \frac{1}{t \ln^\alpha t}\,dt$.

Passant aux sommes partielles, on en déduit comme précédemment que pour tout $N \ge A_\alpha$:

$$\sum_{n=A_\alpha}^{N} \frac{1}{n \ln^\alpha n} \ge \sum_{n=A_\alpha}^{N} \int_{n}^{n+1} \frac{1}{t \ln^\alpha t}\,dt = \int_{A_\alpha}^{N+1} \frac{1}{t \ln^\alpha t}\,dt\ .$$

Mais d'après ce qui précède : $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \int_{A_\alpha}^{N+1} \frac{1}{t \ln^\alpha t}\,dt = +\infty$; on a donc aussi $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=A_\alpha}^{N} \frac{1}{n \ln^\alpha n} = +\infty$, et par suite :

$\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n \ge 2} \frac{1}{n \ln^\alpha n} \text{ est divergente.}}$

Exercice 27

1. Facile avec une double intégration par parties (dériver deux fois $t \mapsto \frac{1}{2\pi} t^2 - t$, intégrer deux fois $t \mapsto \cos nt$).

2. Ce calcul a déjà été fait (cf. exercice **4.**, sur lequel je recopie) :

Pour tout $t \in \left]0, \pi\right[$ et pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a grâce aux formules d'Euler :

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{m} \cos(nt) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{m} \left(e^{int} + e^{-int}\right),$$

soit :

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{m} \cos(nt) = \frac{1}{2}\left(e^{i0t} + \sum_{n=1}^{m} e^{int} + \sum_{n=1}^{m} e^{-int}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i0t} + \sum_{n=1}^{m} e^{int} + \sum_{n=-m}^{-1} e^{int}\right)$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{n=-m}^{m} e^{int} = \frac{1}{2} \sum_{n=-m}^{m} \left(e^{it}\right)^n .$$

Comme $t \in \left]0, \pi\right[$, la somme géométrique $\sum_{n=-m}^{m} \left(e^{it}\right)^n$ est de raison différente de 1. On en déduit que

$$\sum_{n=-m}^{m} \left(e^{it}\right)^n = \underbrace{e^{-imt}}_{\text{premier terme}} \frac{\overbrace{1 - e^{i(2m+1)t}}^{1 - \text{raison}^{\text{nb de termes}}}}{\underbrace{1 - e^{it}}_{1 - \text{raison}}} .$$

On arrange classiquement l'expression obtenue en mettant en facteur, au numérateur et au dénominateur, les « demies exponentielles », ie. en écrivant que $\sum_{n=-m}^{m} \left(e^{it}\right)^n = e^{-imt} \frac{e^{i\frac{2m+1}{2}t}}{e^{i\frac{1}{2}t}} \frac{e^{-i\frac{2m+1}{2}t} - e^{i\frac{2m+1}{2}t}}{e^{-i\frac{1}{2}t} - e^{i\frac{1}{2}t}}$.

Il ne reste plus qu'à simplifier ; on obtient $\sum_{n=-m}^{m} \left(e^{it}\right)^n = \frac{-2i \sin\left(\frac{2m+1}{2}t\right)}{-2i\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}$,

et l'on a donc $\boxed{\sum_{n=1}^{m} \cos(nt) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=-m}^{m} \left(e^{it}\right)^n = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{2m+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}}$.

3.a. Le résultat à démontrer ici est très classique, et porte le nom de ***lemme de Riemann-Lebesgue***.

On intègre par parties (les fonctions mises en jeu sont bien de classe C^1), et l'on obtient :

$$\int_0^\pi f(t) \sin \lambda t \, dt = \left[-\frac{1}{\lambda} f(t) \cos(\lambda t)\right]_0^\pi + \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi f'(t) \cos(\lambda t)\, dt = \frac{f(\pi) + f(0)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi f'(t)\cos(\lambda t)\, dt .$$

Il est évident que $\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{f(\pi) + f(0)}{\lambda} = 0$. D'autre part, la fonction f' est continue sur le segment $[0, \pi]$, elle y est donc bornée. En notant M un majorant de $|f'|$ sur $[0, \pi]$, $\left|\frac{1}{\lambda}\int_0^\pi f'(t)\cos(\lambda t)\, dt\right| \le \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi M \, dt = \frac{M\pi}{\lambda}$, d'où

$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi f'(t)\cos(\lambda t)\, dt = 0$. On a donc bien $\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^\pi f(t) \sin(\lambda t)\, dt = 0$.

3.b. On utilise le théorème de prolongement C^1. La fonction $f : x \mapsto \frac{\frac{1}{2\pi}t^2 - t}{\sin\frac{t}{2}}$ est de classe C^1 sur $\left]0, \pi\right]$, et :

- $f(t) \underset{t \to 0}{\sim} -\dfrac{t}{\frac{t}{2}}$, d'où $\lim\limits_{t \to 0} f(t) = -2$;

- • pour tout $t \in \left]0, \pi\right]$, $f'(t) = \dfrac{\left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\sin\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}t^2 - t\right)\cos\frac{t}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}$, d'où :

$$f'(t) \underset{t \to 0}{=} \frac{\left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\left(\frac{t}{2} + O\left(t^3\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}t^2 - t\right)\left(1 + O\left(t^2\right)\right)}{\frac{t^2}{4} + O\left(t^3\right)} \underset{t \to 0}{=} \frac{\frac{1}{4\pi}t^2 + o\left(t^2\right)}{\frac{t^2}{4} + o\left(t^2\right)},$$

et ainsi $\lim\limits_{t \to 0} f'(t) = \dfrac{1}{\pi}$.

D'après le théorème de prolongement C^1, f est prolongeable en une fonction C^1 sur $\left]0, \pi\right]$. Ce prolongement est obtenu en posant $f(0) = -2$, et vérifie $f'(0) = \dfrac{1}{\pi}$.

4. On rassemble les pièces du puzzle :

- D'après **1.**, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{m} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi}t^2 - t\right)\cos(nt)\,dt = \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi}t^2 - t\right)\left(\sum_{n=1}^{m} \cos(nt)\right)dt$.

- On déduit alors de **2.** que $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} = \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi}t^2 - t\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{2m+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}\right)dt$, d'où :

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} = \int_0^{\pi} \frac{\frac{1}{2\pi}t^2 - t}{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} \sin\left(\frac{2m+1}{2}t\right)dt + \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2\pi}t^2\right)dt.$$

- Il est à peu près immédiat que $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2\pi}t^2\right)dt = \left[\frac{t^2}{4} - \frac{t^3}{12\pi}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{6}$. D'autre part, d'après **3.b.** la fonction

$t \mapsto \dfrac{\frac{1}{2\pi}t^2 - t}{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}$ est (après prolongement) de classe C^1 sur $[0, \pi]$, donc, d'après **3.a.** :

$$\lim_{m \to +\infty} \int_0^{\pi} \frac{\frac{1}{2\pi}t^2 - t}{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} \sin\left(\frac{2m+1}{2}t\right)dt = 0.$$

Il résulte de tout ceci que $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$: la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

5. Remarquons déjà que les séries $\sum \dfrac{1}{(2n)^2}$ et $\sum \dfrac{1}{(2n+1)^2}$ convergent, par exemple parce que $0 \le \dfrac{1}{(2n)^2} \le \dfrac{1}{n^2}$

et $0 \leq \dfrac{1}{(2n+1)^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$. D’autre part, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, d’où, d’après ce qui précède : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{24}$.

Enfin, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, et il en découle que

$\displaystyle\frac{\pi^2}{24} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$, soit : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.