Lycée Lakanal

2025 - 2026

PC

Des exercices de vacances

I – Cinq exercices importants

Mais parfois théoriques ; il peut être utile de s'être refait la main sur des exercices plus pratiques avant de les aborder.

Exercice 1

Théorème spécial des séries alternées

1. Soit $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ une série numérique réelle. On suppose que :

- • $\forall\ n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n > 0$.
- • • La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- • • • $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0 = 0$.

Montrer que la série $\sum (-1)^n u_n$ converge.

2. Déterminer la nature de la série harmonique alternée $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Exercice 2

Soit x un réel.

1. (***Prioritaire***) A l'aide d'une formule de Taylor, montrer que $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} \dfrac{x^i}{i\,!} = \mathrm{e}^x$.

2. (***Plus difficile***). Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} \sum\limits_{j=0}^{n-i} \dfrac{x^j}{i\,!\,j\,!}$.

Exercice 3

Lemme de Cesàro

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers un réel λ . Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $b_n = \dfrac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$.

On souhaite prouver le lemme de Cesàro : la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et admet pour limite λ .

1. Ecrire la définition mathématique du fait que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lambda$.

2. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que : $\exists\ N_1 \in \mathbb{N}\ /\ \forall\ n \geq N_1 ,\ \left| \dfrac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k - \lambda \right| \leq \dfrac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{N_1 - 1} |a_k - \lambda| + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

3. En déduire que : $\exists\ N_3 \in \mathbb{N}\ /\ \forall\ n \geq N_3 ,\ |b_n - \lambda| \leq \varepsilon$. Conclure.

Exercice 4

Calculs de sommes

1. ***Formule de Pascal généralisée***

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $p \in [\![1, n]\!]$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

2.* ***Calcul du noyau de Dirichlet***

Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in \left]0, \pi\right[$:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{m} \cos(n\,t) = \frac{\sin\left(\left(m + \frac{1}{2}\right)t\right)}{2 \sin \frac{t}{2}}.$$

Exercice 5

Comparaison série / intégrale

Soient $p \in \mathbb{N}$, et f une fonction continue, strictement positive, décroissante sur $[\,p, +\infty\,[$.

Pour tout entier $n \geq p$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=p}^{n} f(k)$.

On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_p^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge lorsque $\displaystyle\lim_{X \to +\infty} \int_p^{X} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe dans $\mathbb{R}$.

Dans ce cas, on pose $\displaystyle\int_p^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{X \to +\infty} \int_p^{X} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1.a. Utiliser la décroissance de f pour montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p, on a :

$$\int_p^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq S_n \leq f(p) + \int_p^{n} f(t)\,\mathrm{d}t .$$

b. En déduire que la série de terme général $f(n)$ converge si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_p^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

On suppose désormais que $\sum f(k)$ converge. On pose, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p,

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k).$$

2.a. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p, on a : $\displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n) \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

b. En déduire une condition suffisante portant sur $f(n)$ et $\displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ pour que : $R_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

3. *Dans cette question, pour tout réel x de $[\,2, +\infty\,[$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^2}$.*

a. Montrer que cette fonction vérifie les quatre hypothèses de l'énoncé ainsi que la condition trouvée à la question **2.b.** .

b. En déduire un équivalent, lorsque n est au voisinage de $+\infty$, de $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}$.

II – Etude de suites

Exercice 6

Suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$, **I.**

Etudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son premier terme u_0 et par la relation de récurrence : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^{\,2}}{4} + 1$:

1. Lorsque $u_0 \in [0, 2]$;

2. lorsque $u_0 > 2$;

3. lorsque $u_0 < 0$.

Exercice 7

Suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$, **II.**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée de u_0, et par la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = \frac{1}{3}\left(4 - u_n^{\,2}\right).$$

1. Etudier les variations de $f : x \mapsto \dfrac{1}{3}\left(4 - x^2\right)$, ainsi que le signe de $\varphi : x \mapsto f(x) - x$.

2. Etudier le comportement de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour $|u_0| = 4$, puis pour $|u_0| > 4$.

3. On suppose $|u_0| < 4$.

a. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} \in \left]-4\,,\ \dfrac{4}{3}\right]$.

b. Montrer que s'il existe k tel que $u_k \in \left[0\,,\ \dfrac{4}{3}\right]$, alors on a $u_n \in \left[0\,,\ \dfrac{4}{3}\right]$ pour tout $n \geq k$.

Montrer qu'alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1.

c. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \notin \left[0\,,\ \dfrac{4}{3}\right]$. Quel est le sens de variation de la suite ?

Montrer que ce cas est impossible. Conclure.

Exercice 8

Méthode de Newton

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et soit $f \in C^2([a, b], \mathbb{R})$. On suppose que :

$$f(a) > 0\,,\ f(b) < 0\,,\ f' < 0 \text{ et } f'' > 0 \text{ sur } [a, b].$$

1. Montrer qu'il existe un unique $c \in\,]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

2. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$, et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)}$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie, et converge vers c.

3. On note respectivement m et M le minimum de $|f'|$ et le maximum de $|f''|$ sur $[a, b]$.

a. Montrer que pour tout entier n : $0 \leq c - u_{n+1} \leq \dfrac{M}{2m}(c - u_n)^2$.

b. Montrer qu'il existe une constante q telle que pour tout entier n :

$$0 \leq c - u_n \leq \frac{1}{q}\left(q\left(c - u_n\right)\right)^{2^n} .$$

Commenter.

Exercice 9

Suite implicite I

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation (E_n) : $X^n + X^2 + 2X - 1 = 0$

admet une unique solution x_n sur $\mathbb{R}_+$.

2. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ainsi définie converge vers une limite ℓ que l'on déterminera.

3. Déterminer un équivalent de $x_n - \ell$.

Exercice 10

Suite implicite II

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note f_n l'application définie par : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \mathrm{e}^{nx} + x - 2$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel en lequel f_n s'annule.

On notera désormais u_n ce réel.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi définie est décroissante.

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et admet pour limite 0.

4. En remarquant que $n\,u_n = \ln(2 - u_n)$:

a. montrer que $u_n \sim \dfrac{\ln(2)}{n}$;

b. en déduire que $u_n \underset{n \to +\infty}{=} \dfrac{\ln(2)}{n} - \dfrac{\ln(2)}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$;

c. prouver enfin l'existence d'un réel a, que l'on déterminera, tel que : $u_n \underset{n \to +\infty}{=} \dfrac{\ln(2)}{n} - \dfrac{\ln(2)}{2n^2} + \dfrac{a}{n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

Exercice 11

Suites adjacentes (Schwob)

Soient a, b deux réels strictement positifs, et $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. On définit les suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ par :

$$u_0 = b,\ v_0 = a \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}\, v_n} \end{cases} .$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ sont adjacentes.

On pourra formuler une hypothèse de récurrence suffisamment précise.

2. On suppose $b \leq a$, et on pose $b = a\cos\theta$.

a. Montrer que $u_1 = a\cos^2\dfrac{\theta}{2}$ et $v_1 = a\cos\dfrac{\theta}{2}$.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = a\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\theta}{2^k}$ et $u_n = v_n\cos\dfrac{\theta}{2^n}$.

c. Montrer que pour tout $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $v_n = a\dfrac{\sin\theta}{2^n\sin\dfrac{\theta}{2^n}}$.

d. Déterminer alors la limite commune de $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$.

3. En s'inspirant de ce qui précède, traiter le cas $b \geq a$.

Exercice 12

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée de son premier terme $u_0 \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, et par la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n).$$

1. Etudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose : $v_n = (u_{n+1})^\alpha - (u_n)^\alpha$.

Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ***non nul***.

3. En déduire un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 13

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \dfrac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2n)}$.

1. Exprimer u_n à l'aide de factorielles uniquement.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

3. Soit $v_n = (n+1)u_n^2$. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Que peut – on en déduire pour $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$?

4. On note $\alpha = \lim\limits_{n \to \infty} v_n$. En étudiant la suite $w_n = n\,u_n^2$, montrer que $\alpha > 0$. Que peut – on en déduire ?

Exercice 14

1. Etudier la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln x}$ sur $[2, +\infty[$.

2. En déduire une minoration de la somme $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}$. *On pourra comparer* $\dfrac{1}{k\ln k}$ *à* $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$.

3. On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que : $u_0 > 0$, $u_1 > 0$ et pour tout $n \geq 2$, $u_n = u_{n-1} + \dfrac{u_{n-2}}{n\ln n}$.

Montrer que pour tout $n \geq 2$, $u_n - u_{n-1} \geq \dfrac{u_0}{n\ln n}$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est – elle convergente ?

4. Que dire si l'on suppose u_0 et u_1 strictement négatifs ?

II – Etude de séries

Les résultats suivants pourront être librement utilisés dans tous les exercices qui suivent :

1. ***Cf. exercice* 2.**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge absolument, et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$.

2. ***Cf. exercice* 5.**

Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit f continue, positive et décroissante sur $[\, p, +\infty [$.

Alors, la série $\sum_{n \geq p} f(n)$ converge si et seulement si $\lim_{X \to +\infty} \int_p^X f(t)\, \mathrm{d}t$ existe dans $\mathbb{R}$.

3. ***Cf. exercice* 1.**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante, convergeant vers 0. Alors, la série $\sum (-1)^n u_n$ converge.

4. ***Séries géométriques et séries géométriques dérivées***

Soit q un complexe.

- La série géométrique $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$, et dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

- • La série géométrique dérivée $\sum_{n \geq 1} n\, q^{n-1} = \sum_{n \geq 0} (n+1)\, q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$, et dans ce cas : $\sum_{n=1}^{+\infty} n\, q^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, q^n = \frac{1}{(1-q)^2}$.

- • • La série géométrique dérivée seconde $\sum_{n \geq 2} n(n-1)\, q^{n-12} = \sum_{n \geq 0} (n+2)(n+1)\, q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$, et dans ce cas : $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\, q^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)\, q^n = \frac{2}{(1-q)^3}$.

- • • • Et ainsi de suite : énoncer et admettre un résultat général…

Exercice 15

Etudier la nature, et, le cas échéant, déterminer la somme des séries suivantes.

1. $\sum_{n \geq 0} \frac{2n + 3^n}{4^{n+1}}$ **2.** $\sum_{n \geq 0} \frac{\cos(n)\, \mathrm{e}^{-n}}{n!}$ **3.** $\sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)^2}{3^n}$

4. $\sum_{n \geq 0} \frac{n^3}{2^n}$ **5.** $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n!}$ **6.** $\sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{n!}$ **7.** $\sum_{n \geq 1} \frac{(n+1)^2}{n!}$.

Exercice 16

Etudier la nature, et, le cas échéant, déterminer la somme des séries suivantes.

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$. **2.** $\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$. **3.** $\sum_{n \geq 1} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$.

4. $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n + (-1)^{n+1}}$. **5.** $\sum_{n \geq 3} \frac{4n - 2}{n(n^2 - 4)}$.

Exercice 17

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum \frac{1}{3^n + n}$ **2.** $\sum \frac{2^n}{e^{\sqrt{n}}}$ **3.** $\sum \frac{n \sin n}{n^3}$ **4.** $\sum \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

5. $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n!}$ **6.** $\sum (\ln n)^n e^{-n}$ **7.** $\sum \frac{n}{n^2 + 1}$.

Exercice 18

1. Pour quelles valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ la série de terme général $\ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$ est – elle convergente ?

2. Calculer alors la somme de cette série.

Exercice 19

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge, et calculer sa somme.

2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$.

3. En déduire la nature de la série de terme général $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$.

Exercice 20

Déterminer la nature de la série de terme général :

1. $u_n = \cos\left(\frac{\pi n^2}{2n^2 + an + 1}\right)$, avec $a > 0$. **2.** $v_n = e^{-\sqrt{n}}$. **3.** $w_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Exercice 21

Par comparaison à une intégrale, donner un équivalent de

1. $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$. **2.** $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}$.

Exercice 22

Déterminer la nature des séries suivantes *des calculs de D.L. pourraient se révéler fructueux...*

1. $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{n}} \ln(n)}$. **2.** $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$, où $\alpha > 0$.

Exercice 23

Calcul de $\varsigma(2)$, version 1

On considère la série $S = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$. D'autre part, on pose pour tout entier $p \geq 0$:

$$I_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}(t)\,\mathrm{d}t \text{, et } J_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2p}(t)\,\mathrm{d}t .$$

1.a. Montrer que pour tout réel t tel que $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$: $t \leq \frac{\pi}{2}\sin t$.

1.b. Vérifier que pour tout entier $p \geq 0$: $0 \leq J_p \leq \frac{\pi^2}{4}\left(I_p - I_{p+1}\right)$.

1.c. Exprimer I_{p+1} en fonction de I_p.

1.d. En déduire la limite de $\frac{J_p}{I_p}$ lorsque p tend vers $+\infty$.

2.a. Exprimer I_p en fonction de J_p et J_{p-1}.

2.b. En déduire que pour tout $p \geq 1$: $\frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{J_p}{I_p} = \frac{1}{2p^2}$.

2.c. Calculer I_0 et J_0.

2.d. Montrer que la série S converge, et déterminer sa somme.

Exercice 24

Somme de la série harmonique alternée, I

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

1. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} a_n$. *On pourra penser aux sommes de Riemann.*

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_{2n} = a_n$.

b. En déduire que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge, et déterminer sa somme.

Exercice 25

Somme de la série harmonique alternée, II

1. Montrer, à l'aide d'une formule de Taylor, que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2 \right| \leq \frac{1}{n+1} .$$

2. Déterminer la nature de la série harmonique alternée $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, et préciser sa somme.

Exercice 26

Séries de Bertrand

Soit α un réel. Pour tout $n \geq 2$, on pose : $u_n = \dfrac{1}{n.\ln^{\alpha} n}$.

1. Montrer qu'il existe un réel $A \geq 2$ tel que pour tout $n \geq A$: $\displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{1}{x \ln^{\alpha} x}\,\mathrm{d}x \leq u_n \leq \int_{n}^{n+1} \frac{1}{x \ln^{\alpha} x}\,\mathrm{d}x$.

2. Déterminer la limite lorsque X tend vers $+\infty$ de l'intégrale $\displaystyle\int_{A}^{X} \frac{1}{x \ln^{\alpha} x}.\mathrm{d}x$.

3. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 2} u_n$, suivant la valeur de α.

Exercice 27

Calcul de $\varsigma(2)$, version 2

1. Montrer que pour tout n entier strictement positif : $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} t^2 - t \right) \cos(n\,t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$

2. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in \left]0, \pi\right[$:

$$\sum_{n=1}^{m} \cos(n\,t) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\dfrac{(2\,m+1)\,t}{2} \right)}{2 \sin \dfrac{t}{2}}.$$

3.a. Soit f une application de classe C^1 sur $[0, \pi]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_{0}^{\pi} f(t) \sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

b. Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{\frac{1}{2\pi} t^2 - t}{\sin \frac{t}{2}}$ peut être prolongée en une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi]$.

4. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

5. En déduire enfin $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.