Lycée Lakanal

2025 - 2026

PC

DM facultatif – pour le 04/09

Ce devoir est facultatif. Il est constitué de 5 problèmes indépendants, qu'il n'est pas question de tous traiter. Si l'on souhaite le travailler, il est conseillé de choisir l'un, voire deux, de ces problèmes (mais pas les cinq !). Si l'on a cherché certains de ces problèmes, il est vivement conseillé de rendre une copie à la rentrée, pour en vérifier la rédaction.
Les corrigés de ces problèmes seront donnés à la rentrée. Ceci dit, si l'on souhaite des indications, voire les corrigés, avant, il suffit de demander…

Problème 1

L'objectif de ce problème est de calculer la valeur exacte de la limite de la suite des moyennes arithmético – géométriques pour certaines valeurs initiales.

On considère un réel $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\begin{cases} u_0 = \cos(x) \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n \cos\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right) \end{cases}$.

a. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $v_n = u_n \sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$ est géométrique.

b. En déduire, pour tout entier n, l'expression de u_n en fonction de x et de n.

c. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, et donner sa limite.

On considère désormais deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_0 = \dfrac{1}{\cos(x)} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n} \end{cases}.$$

2.a. Donner l'expression de b_1 comme quotient de deux cosinus.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n sont strictement positifs.

3.a. Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{\sqrt{a_{n+1}}}{2\left(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}\right)}\left(b_n - a_n\right)$.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n < b_n$.

c. En déduire les variations des suites $\left(a_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(b_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

d. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n < \dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{1}{\cos(x)} - 1\right)$.

e. Montrer que les suites $\left(a_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(b_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes et admettent la même limite.

On notera ℓ cette limite.

4.a. Vérifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$a_n = \frac{u_n \cos\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}{\cos^2(x)}, \qquad \text{et} \qquad b_n = \frac{u_n}{\cos^2(x)} .$$

b. En déduire la valeur de ℓ.

5. Dans cette question, on considère le cas particulier $x = \dfrac{\pi}{4}$.

a. Calculer la valeur de ℓ.

b. En déduire un encadrement de π à l'aide de a_n et b_n.

c. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $0 < b_{n+1} - a_{n+1} < \dfrac{1}{4}\left(b_n - a_n\right)$.

d. Combien de termes des suites $\left(a_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(b_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ suffit – il de calculer pour obtenir un encadrement de π à 10^{-8} près ? (*on ne demande pas de calculer les valeurs de* a_n *et* b_n *correspondantes*).

e. Ecrire une fonction Python ayant pour paramètre d'entrée un nombre entier p, et renvoyant en retour un encadrement de π à 10^{-p} près, encadrement basé bien entendu sur les suites $\left(a_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(b_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Problème 2

Etant donnée une suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels non nuls, on lui associe la suite $\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall\ n \geq 1,\ \ p_n = \prod_{k=1}^{n} u_k .$$

On dira que le *produit* $\prod_{k\geq 1} u_k$ converge si et seulement si la suite $\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite finie *non nulle* ; dans le cas contraire, on dira que le produit $\prod_{k\geq 1} u_k$ diverge.

I. Quelques exemples

1. Montrer que si le produit $\prod_{k\geq 1} u_k$ converge, alors la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, et déterminer sa limite.

2. Dans cette question, et dans cette question seulement, on suppose que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n = 1+\dfrac{1}{n}$. .

Calculer p_n pour $n\geq 1$, et en déduire la nature du produit $\prod_{k\geq 1} u_k$.

3. Dans cette question, et dans cette question uniquement, on considère un réel $a\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$, et l'on suppose que $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite de terme général $u_n = \cos\dfrac{a}{2^n}$. Pour tout entier $n\geq 1$, calculer le réel $p_n \sin\dfrac{a}{2^n}$.

Montrer alors que le produit $\prod_{k\geq 1} u_k$ converge, et déterminer sa limite.

II. Une caractérisation de la convergence d'un produit

Dans cette partie, on considère une suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente, de limite 1.

1. Montrer qu'il existe un entier $n_0 > 0$ tel que pour tout $n\geq n_0$, $u_n > 0$.

On définit alors à partir du rang n_0 la suite $\left(S_n\right)_{n\geq n_0}$ par : $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} S_k$.

2. Montrer que le produit $\prod_{k\geq 1} u_k$ converge si et seulement la suite $\left(S_n\right)_{n\geq n_0}$ converge.

3. Dans cette question, et dans cette question seulement, on suppose que $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite de terme général $u_n = \sqrt[n]{n}$.

a. Montrer que pour tout $k\geq 3$, $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{\ln k}{k}$.

b. En déduire la nature (convergente ou divergente) du produit $\prod_{k\geq 1} u_k$.

III. Un deuxième critère de convergence d'un produit.

On considère maintenant une suite $\left(v_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ à termes strictement positifs, ainsi que le produit de terme général $p_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + v_k\right)$. On définit également la suite $\left(T_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$, par : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$.

1. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\ln\left(1 + x\right) \leq x$.

2. Montrer que si la suite $\left(T_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge, alors le produit $\prod_{k \geq 1}\left(1 + v_k\right)$ converge également.

3. Montrer la réciproque : si le produit $\prod_{k \geq 1}\left(1 + v_k\right)$ converge, alors la suite $\left(T_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

4. On considère dans cette question la suite $\left(T_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

a. En utilisant la question **I.2.**, que peut – on dire de la suite $\left(T_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$?

b. En encadrant, pour $k \geq 2$, l'intégrale $\int_{k}^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$, trouver un équivalent de T_n.

5. On considère dans cette question un réel a et le produit :

$$p_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + a^{2^k}\right).$$

a. Que peut-on dire du produit $\left(p_n\right)$ lorsque $a \geq 1$?

On suppose désormais que $a \in \left]0, 1\right[$.

b. Montrer que le produit $\left(p_n\right)$ converge.

c. Soit un entier $n \geq 1$. Calculer $\left(a^2 - 1\right) p_n$ et en déduire la limite de la suite $\left(p_n\right)$.

Problème 3
Sur la transformation d'Abel

Partie I : Transformation d'Abel

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On s'intéresse ici à la convergence de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$.

Pour tout entier naturel n, on pose $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$.

1. (a) Vérifier que $B_0 = b_0$ et $\forall n \geqslant 1$, $b_n = B_n - B_{n-1}$.

   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$.

2. On suppose que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

   (a) Montrer que la suite $(a_n B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

   (b) On suppose de plus que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (a_n - a_{n+1})$ est absolument convergente ; montrer alors que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (a_n - a_{n+1}) B_n$ est absolument convergente et en déduire la convergence de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$.

3. Établir que si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée alors la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$ converge.

4. Énoncez et démontrez (à l'aide de ce qui précède) un critère garantissant la convergence d'une série alternée.

Partie II : Application à l'étude d'une série trigonométrique

Pour tout réel x et tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) \quad \text{et} \quad C_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$,

$$C_n(x) + iS_n(x) = \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} e^{ix},$$

   et que

$$\frac{1}{2} + C_n(x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{et} \quad S_n(x) = \frac{\sin\left(n\frac{x}{2}\right)\sin\left((n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

2. En déduire alors que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et établir la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\sin(nx)}{n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   Dans la suite, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n}$, $x \in \mathbb{R}$, et on cherche à calculer la somme de cette série.

3. (a) Vérifier que f est impaire et 2π-périodique.

   (b) Soit $x \in]0, \pi[$. Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sin(kx)}{k} = \dfrac{\pi - x}{2} - \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_x^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \mathrm{d}t.$

4. Soit $x \in]0,\pi[$; pour tout $t \in [x,\pi]$, on pose $h(t) = \dfrac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.
   (a) Vérifier que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x,\pi]$ et que h' y est bornée.
   (b) Montrer la formule :
$$\int_x^\pi h(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{2n+1}\left(\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + \int_x^\pi h'(t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t\right).$$
   (c) En déduire un majorant pour la valeur absolue de l'intégrale du premier membre et conclure que cette intégrale tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
   (d) Établir alors que pour tout $x \in]0,2\pi[$, $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$.

Partie III : Une majoration uniforme des sommes partielles de la série précédente

On conserve les notations de la partie précédente.

1. Soit $x \in]0,2\pi[$.
   (a) Montrer, en utilisant une transformation d'Abel (I.1), que pour tout couple (m,n) d'entiers naturels tels que $1 \leqslant m < n$, on a
$$\sum_{p=m+1}^{n} \frac{\sin(px)}{p} = \frac{S_n(x)}{n} + \sum_{p=m+1}^{n-1} S_p(x)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) - \frac{S_m(x)}{m+1}.$$
   (b) En déduire que
$$\left|\sum_{p=m+1}^{n} \frac{\sin(px)}{p}\right| \leqslant \frac{2}{(m+1)\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{et que} \quad \left|\sum_{p=m+1}^{+\infty} \frac{\sin(px)}{p}\right| \leqslant \frac{2}{(m+1)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$
2. Soit $x \in]0,\pi]$. On note k la partie entière de $\dfrac{\pi}{x}$: $k = E\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$; on a donc $k \geqslant 1$.
   (a) Montrer que $0 \leqslant \displaystyle\sum_{p=1}^{k} \frac{\sin(px)}{p} \leqslant kx \leqslant \pi$.
   (b) Montrer que si $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, alors $\sin\theta \geqslant \dfrac{2}{\pi}\theta$.
   (c) Soit $n \geqslant k+1$; Montrer alors que $\left|\displaystyle\sum_{p=k+1}^{n} \frac{\sin(px)}{p}\right| \leqslant 2$.
3. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$$\left|\sum_{p=1}^{n} \frac{\sin(px)}{p}\right| \leqslant 2 + \pi$$

Problème 4
Sur les restes d'une série convergente

PARTIE I - Etude d'un premier reste

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n = \displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p}$.

1. Refaire, sur ce cas particulier, la démonstration du cours permettant de démontrer que la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^p}{p}$ est convergente. La quantité R_n a donc un sens pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. (a) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $q \geq n+1$. Etablir que : $\displaystyle\sum_{p=n+1}^{q} \frac{(-1)^p}{p} = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx + (-1)^q \int_0^1 \frac{x^q}{1+x} dx$.

   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $R_n = (-1)^{n+1} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

3. (a) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, qu'il existe $\beta \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{R}^*$ tels que :

$$R_n \underset{n \to +\infty}{=} k \frac{(-1)^{n+1}}{n^\beta} + O\left(\frac{1}{n^{\beta+1}}\right)$$

   (b) En déduire la nature de la série de terme général R_n.

4. Calculer, en s'inspirant de la question **2.**, la somme $S_1 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} R_n$.

PARTIE II - Etude d'un second reste

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $r_n = \displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p}}$.

5. Démontrer que la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}$ est convergente. La quantité r_n a donc un sens pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on peut poser $S_2 = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}$.

6. Démontrer qu'il existe un réel L (que l'on ne cherchera pas à calculer) tel que : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(U_n - \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}} dx\right) = L + 2$.

La question précédente permet d'obtenir le début d'un développement asymptotique de la suite (U_n). On pourrait perfectionner ce résultat et démontrer que :

$$U_n \underset{n \to +\infty}{=} 2\sqrt{n} + L + \frac{1}{2\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

7. (a) Exprimer r_{2n} en fonction de S_2 et des sommes partielles U_n et U_{2n}.

   (b) En déduire qu'il existe deux réels a et b que l'on déterminera, tels que : $r_{2n} = a + \dfrac{b}{\sqrt{n}} + O\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.

   (c) Exprimer S_2 en fonction de L et déterminer la nature de la série de terme général r_n.

Problème 5
Lemme de Cesàro généralisé

1. **Enoncé du théorème**
Soit (u_n) une suite constituée de réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n diverge, ce qui revient à dire ici que la suite des sommes partielles tend vers $+\infty$. Soit (v_n) une suite réelle qui converge vers ℓ.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_k}{\sum\limits_{k=0}^{n} u_k}$.
   (a) Démontrer que la suite (w_n) converge vers ℓ. (*On pourra raisonner avec des quantificateurs*).
   (b) La convergence de la suite (w_n) entraîne-t-elle celle de la suite (v_n) ?
2. **Une première application :** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{1}{k}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$.
3. **Une deuxième application :**
   (a) Soient (u_n) et (v_n) deux suites équivalentes constituées de réels strictement positifs telles que les séries de termes généraux u_n et v_n sont divergentes. Démontrer que les sommes partielles $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k\right)$ et $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} v_k\right)$ sont des suites équivalentes.
   (b) En déduire un équivalent de la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\right)$. *On cherchera une suite* (a_n) *telle que* $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} a_{n+1} - a_n$
   (c) Démontrer plus précisément que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n)\right)$ converge vers une limite γ que l'on ne cherchera pas à calculer.
4. **Une troisième application :** On dit que la série $\sum u_n$ converge au sens de Césaro si la suite (σ_n) définie par $\sigma_n = \dfrac{S_0 + S_1 + \ldots + S_n}{n+1}$ converge, où $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$. Démontrer que, si la série converge, alors, elle converge au sens de Césaro.
5. **Une quatrième application :** Dans toute cette question, on considère une suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 \geq -\frac{1}{2}$ et par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + u_n^2$.
   (a) Etudier la convergence de (u_n) suivant les valeurs de u_0 et préciser sa limite éventuelle.
   (b) On suppose dans cette question que la suite (u_n) converge mais n'est pas stationnaire, et on pose $v_n = -u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
      i. Quelle relation de récurrence vérifie (v_n) ? Montrer que v_n est équivalent à v_{n+1}.
      ii. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{1}{v_n} - \dfrac{1}{v_{n-1}}$. Démontrer que (a_n) converge et en déduire un équivalent de v_n.
      iii. Quelle est la nature des séries de termes généraux v_n, $\sin\left(v_n^2\right)$ et $\frac{v_n}{\sqrt{n}}$?
      iv. On pose $b_n = a_n - 1$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (b_n) tend vers 0 et en donner un équivalent.
      v. En déduire la nature de la série de terme général $t_n = v_n - \frac{1}{n}$.