



2025 - 2026

DM facultatif de rentrée - corrigé

Problème 1

1.a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = u_n \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = u_n \frac{1}{2} \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{1}{2} v_n$:

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b. On déduit du résultat précédent que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{2^n} v_0$, soit :

$$u_n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} u_0 \sin(x) = \frac{1}{2^n} \cos(x) \sin(x) = \frac{1}{2^{n+1}} \sin(2x).$$

Comme $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$ est non nul, on a donc : $u_n = \frac{\sin(2x)}{2^{n+1} \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$.

c. On sait que $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$. Il en résulte que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sin(2x)}{2^{n+1} \frac{x}{2^n}}$: ainsi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge,

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\sin(2x)}{2x}.$$

2.a. On a $a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)$, et $b_1 = \sqrt{a_1 b_0} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) \frac{1}{\cos x}} = \sqrt{\frac{\cos x + 1}{2 \cos^2 x}}$.

Avec la formule $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$, on obtient : $b_1 = \sqrt{\frac{2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2 \cos^2(x)}}$. Comme $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, les cosinus sont

$$\text{positifs, et ainsi } b_1 = \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos(x)}.$$

b. Récurrence sans aucune difficulté.

3.a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} b_{n+1} - a_{n+1} &= \sqrt{a_{n+1}} \sqrt{\frac{a_n + b_n}{2}} - \sqrt{a_{n+1} b_n} = \sqrt{a_{n+1}} \left(\sqrt{\frac{a_n + b_n}{2}} - \sqrt{b_n} \right) \\ &= \sqrt{a_{n+1}} \frac{\frac{a_n + b_n}{2} - b_n}{\sqrt{b_n} + \sqrt{\frac{a_n + b_n}{2}}} = \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}})} (b_n - a_n). \end{aligned}$$

b. Récurrence à nouveau évidente, avec le résultat de **3.a.**

c. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n < a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} < b_n$, donc la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante, et

$b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n} < \sqrt{b_n b_n} = b_n$, ainsi la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

d. On sait que $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}})}(b_n - a_n)$, que $b_n - a_n > 0$ et que $a_{n+1} < b_n$. On en tire

immédiatement : $b_{n+1} - a_{n+1} < \frac{1}{2}(b_n - a_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par une autre récurrence facile, on en déduit que pour

tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n < \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$, soit : $b_n - a_n < \frac{1}{2^n} \left(\frac{1}{\cos(x)} - 1 \right)$.

e. On sait que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, et la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante. De plus,

$0 < b_n - a_n < \frac{1}{2^n} \left(\frac{1}{\cos(x)} - 1 \right)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - a_n = 0$. Ainsi les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont

adjacentes. Il en résulte qu'elles sont toutes deux convergentes, et qu'elles ont la même limite.

4.a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété $\mathcal{H}(n)$ par :

$$\mathcal{H}(n) : \ll a_n = \frac{u_n \cos\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\cos^2(x)} \text{ et } b_n = \frac{u_n}{\cos^2(x)} \gg .$$

Initialisation :

On a $a_0 = 1 = \frac{\cos(x) \cos(x)}{\cos^2(x)} = \frac{u_0 \cos\left(\frac{x}{2^0}\right)}{\cos^2(x)}$ et $b_0 = \frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)} = \frac{u_0}{\cos^2(x)}$, d'où $\mathcal{H}(0)$.

Hérédité

Soit un entier $n \in \mathbb{N}$ fixé, supposons $\mathcal{H}(0)$.

Alors :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{\frac{u_n \cos\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\cos^2(x)} + \frac{u_n}{\cos^2(x)}}{2} = u_n \frac{\cos\left(\frac{x}{2^n}\right) + 1}{2 \cos^2(x)} \\ &= u_n \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{\cos^2(x)} = \frac{u_{n+1} \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{\cos^2(x)} , \quad \text{et :} \end{aligned}$$

$$b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n} = \sqrt{\frac{u_{n+1} \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{\cos^2(x)} \frac{u_n}{\cos^2(x)}} = \sqrt{\frac{u_{n+1}^2}{\cos^4(x)}} = \frac{u_{n+1}}{\cos^2(x)} , \text{ d'où } \mathcal{H}(n+1) .$$

Par principe de récurrence, on a bien $a_n = \frac{u_n \cos\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\cos^2(x)}$ et $b_n = \frac{u_n}{\cos^2(x)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\sin(2x)}{2x}$. Donc $\ell = \lim a_n = \frac{\sin(2x)}{\cos^2(x)}$, que l'on peut arranger un peu :

$$\ell = \lim a_n = \frac{2 \sin(x) \cos(x)}{2x \cos^2(x)} = \frac{\tan(x)}{x}.$$

5.a. D'après le résultat de la question précédente, on a ici $\ell = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}$.

b. On sait que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont respectivement croissante et décroissante, et toutes deux de

limite $\ell = \frac{4}{\pi}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq \frac{4}{\pi} \leq b_n$, et l'on en déduit que $\frac{4}{b_n} \leq \pi \leq \frac{4}{a_n}$.

c. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a toujours $0 < b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}})}(b_n - a_n)$

et $b_n > a_{n+1} > a_n$. Donc $0 < b_{n+1} - a_{n+1} < \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2(\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_{n+1}})}(b_n - a_n) = \frac{1}{4}(b_n - a_n)$.

d. Avec l'encadrement $\frac{4}{b_n} \leq \pi \leq \frac{4}{a_n}$, les termes a_n et b_n donnent un encadrement de π à 10^{-8} près dès lors

que $\frac{4}{a_n} - \frac{4}{b_n} < 10^{-8}$, soit dès que $\frac{4}{a_n b_n} (b_n - a_n) < 10^{-8}$ (*).

On a 0, ainsi (*) est vérifié dès que $\frac{1}{4^{n-1}} < 10^{-8}$, soit dès que $-(n-1) \ln(4) < -8 \ln(10)$, c'est-à-dire dès

que $n > 4 \frac{\ln(10)}{\ln(2)} + 1$, donc dès que $\boxed{n \geq 8}$.

e. De même, les termes a_n et b_n donnent un encadrement de π à 10^{-p} près dès que $n > \frac{p}{2} \frac{\ln(10)}{\ln(2)} + 1$, d'où le script

Python suivant :

```
1 from numpy import log, sqrt
2
3 def f(a,b):
4     """calcule les termes suivants des suites (a) et (b)."""
5     a=(a+b)/2
6     b=sqrt(a*b)
7     return a,b
8
9 def approx_pi(p):
10     a,b=1, sqrt(2) #les valeurs initiales pour x=pi/4
11     n=int(p/2*log(10)/log(2)) + 2 #le rang d'arrêt obtenu en question précédente
12     for k in range(1,n+1): #n itérations des suites a et b
13         a,b=f(a,b)
14     return 4/b,4/a
```

Exemple d'exécution :

```
>>> approx_pi(8)
(3.1415926532889933, 3.1415926541913946)
```

(on constate que les 8 premières décimales sont les bonnes, et sont égales).

Problème 2

I. Quelques exemples

1. Supposons que le produit $\prod_{k \geq 1} u_k$, notons alors ℓ la limite (non nulle) de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. On remarque que pour tout

$n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \neq 0$ (sinon la suite $(p_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ serait nulle à partir du rang n), et que par suite pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $p_m \neq 0$.

Il est licite d'écrire que $\frac{p_n}{p_{n-1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ell}{\ell}$, soit : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc convergente, de limite 1.

2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k}$. Ce produit est télescopique, et il vient $p_n = n+1$. Le

produit $\prod_{k \geq 1} u_k$ est donc divergent, de limite $+\infty$.

3. Posons pour tout $n \geq 1$, $q_n = p_n \sin \frac{a}{2^n}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $q_{n+1} = p_{n+1} \sin \frac{a}{2^{n+1}} = p_n \cos \frac{a}{2^{n+1}} \sin \frac{a}{2^{n+1}}$,

d'où $q_{n+1} = \frac{1}{2} p_n \sin \frac{a}{2^n} = \frac{1}{2} q_n$. La suite (q_n) est $\frac{1}{2}$ -géométrique ; il en résulte que pour tout $n \geq 1$,

$$q_n = \frac{1}{2^{n-1}} q_1 = \frac{1}{2^{n-1}} p_1 \sin \frac{a}{2} = \frac{1}{2^{n-1}} \cos \frac{a}{2} \sin \frac{a}{2} = \frac{1}{2^n} \cos a.$$

Comme $a \in \mathbb{R} \setminus \pi \mathbb{Z}$, $\sin \frac{a}{2^n}$ n'est jamais nul, et $p_n = \frac{q_n}{\sin \frac{a}{2^n}} = \frac{\cos a}{2^n \sin \frac{a}{2^n}}$. Il en résulte que $p_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\cos a}{2^n \frac{a}{2^n}}$:

Le produit $\prod_{k \geq 1} u_k$ converge, et a pour limite $\frac{\cos a}{a}$.

II. Une caractérisation de la convergence d'un produit

1. Par définition de la convergence d'une suite :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, 1 - \varepsilon < u_n < 1 + \varepsilon.$$

En particulier, avec $\varepsilon = 1$: $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, 0 < u_n$.

2. On a pour tout $n \geq n_0$, $p_n = \left(\prod_{k=1}^{n_0-1} u_k \right) \prod_{k=n_0}^n u_k$. Comme pour tout $n \geq n_0$, $u_n > 0$, on peut écrire que

$$p_n = \left(\prod_{k=1}^{n_0-1} u_k \right) \prod_{k=n_0}^n \exp(\ln(u_k)) = \left(\prod_{k=1}^{n_0-1} u_k \right) \exp\left(\sum_{k=n_0}^n \ln(u_k)\right), \text{ soit :}$$

$$p_n = \left(\prod_{k=1}^{n_0-1} u_k \right) \exp(S_n).$$

$\prod_{k=1}^{n_0-1} u_k$ étant un réel fixé non nul, on en déduit que le produit (p_n) converge si et seulement si la suite $(\exp(S_n))_{n \geq n_0}$

converge vers un réel non nul, c'est-à-dire si et seulement si la suite $(S_n)_{n \geq n_0}$ converge.

3. Ici on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 1$, et l'on peut définir la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ par : $S_n = \sum_{k=1}^n \ln(u_k)$.

a. Soit $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$.

Par conséquent, f est décroissante sur $[e, +\infty[$. Comme $3 \geq e$, on a pour tout $k \geq 3$, pour tout $x \in [k, k+1]$,

$$f(x) \leq f(k). \text{ Il en résulte que } \int_k^{k+1} f(x) dx \leq \int_k^{k+1} f(k) dx, \text{ soit : } \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x} dx \leq \frac{\ln k}{k}.$$

b. On a ici pour tout $n \geq 3$, $\sum_{k=3}^n \ln(u_k) = \sum_{k=3}^n \frac{\ln(k)}{k}$, d'où d'après ce qui précède,

$$\sum_{k=3}^n \ln(u_k) \geq \sum_{k=3}^n \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x} dx = \int_3^{n+1} \frac{\ln x}{x} dx, \text{ soit :}$$

$$\sum_{k=3}^n \ln(u_k) \geq \left[\frac{1}{2} \ln^2(x) \right]_3^{n+1} = \frac{\ln^2(n+1) - \ln^2(3)}{2}.$$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=3}^n \ln(u_k) = +\infty$. On a donc également $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$. La suite $(S_n)_{n \geq 1}$ diverge, le

produit $\prod_{k \geq 1} u_k$ est donc lui aussi divergent.

III. Un deuxième critère de convergence d'un produit.

1. La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable et concave, donc pour tout $x \geq 0$, $f(x) \leq x f'(0) + f(0)$, soit : $\ln(1+x) \leq x$.

2. Supposons que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. Cela revient à dire que la série $\sum v_n$ converge, et ceci entraîne que son terme général tend vers 0. Il en résulte que $v_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \ln(1+v_n)$. Les séries $\sum v_n$ et $\sum \ln(1+v_n)$, à terme général positif, sont donc de même nature. Ainsi la série $\sum \ln(1+v_n)$ converge : autrement dit, la suite (S_n) converge. On déduit alors de II.1. que le produit $\prod_{k \geq 1} (1+v_k)$ converge.

3. Supposons maintenant que le produit $\prod_{k \geq 1} (1+v_k)$ converge. Alors d'après I.1., la suite $(v_n)_n$ converge vers 0, et, d'après II.2., la série $\sum \ln(1+v_n)$ converge. Les séries $\sum \ln(1+v_n)$ et $\sum v_n$ sont à terme général positif et $v_n \sim \ln(1+v_n)$, donc $\sum v_n$ est également convergente. Par conséquent, la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

4.a. D'après I.2., le produit $\prod_{k \geq 1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$ est divergent. En appliquant le résultat de III.3. à la suite

$$(v_n)_{n \geq 1} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}, \text{ on en déduit que la suite } (T_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ de terme général } T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \text{ est divergente.}$$

b. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et en particulier sur $[1, +\infty[$, on a pour tout $k \geq 2$, pour

tout $t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{t-1} \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{t}$. En intégrant sur $[k, k+1]$, on obtient $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t-1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$, soit

$\int_{k-1}^k \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$. On somme pour k variant de 2 à n ; il vient avec la relation de Chasles,

$\int_1^n \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \int_2^{n+1} \frac{dt}{t}$. Ainsi $\ln(n) \leq T_n \leq 1 + \ln(n+1) - \ln(2)$. Comme

$\ln(n) \sim 1 + \ln(n+1) - \ln(2)$, on a finalement $T_n \sim \ln(n)$.

5. On considère dans cette question un réel a et le produit :

$$p_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + a^{2^k}\right).$$

- a. Lorsque $a \geq 1$, la suite $\left(1 + a^{2^n}\right)_n$ ne tend pas vers 1, donc, d'après **I.2.**, le produit (p_n) diverge (et plus précisément, on montre facilement qu'il tend vers $+\infty$).
- b. On pose ici $v_n = a^{2^n}$. La suite (v_n) est à terme strictement positif, et les résultats précédents s'appliquent, le produit (p_n) est de même nature que la série $\sum a^{2^k}$. On montre facilement par récurrence que pour tout k , $2^k \geq k$, donc puisque $a \in]0, 1[$, $0 \leq a^{2^k} \leq a^k$. La série géométrique $\sum a^k$ converge. Alors par majoration, la série $\sum a^{2^k}$ est elle aussi convergente, et il en est de même du produit (p_n) .
- c. On a $(a^2 - 1)p_1 = (a^2 - 1)(a^2 + 1) = a^4 - 1$, puis
- $(a^2 - 1)p_2 = (a^2 - 1)p_1(a^4 + 1) = (a^4 - 1)(a^4 + 1) = a^8 - 1$; bref, on voit que pour tout $n \geq 1$, $(a^2 - 1)p_n = a^{2^{n+1}} - 1$, et on le prouve par une récurrence que je vous laisse écrire.

On en déduit immédiatement que $\lim p_n = \frac{1}{1 - a^2}$.

Problème 3

Sur la transformation d'Abel

1. (a) On a : $B_0 = \sum_{k=0}^0 b_k = b_0$ et $\forall n \geq 1, b_n = \sum_{k=0}^n b_k - \sum_{k=0}^{n-1} b_k = B_n - B_{n-1}$.

Donc :

$$\boxed{B_0 = b_0 \text{ et } \forall n \geq 1, b_n = B_n - B_{n-1}.}$$

- (b) On utilise les relations ci-dessus pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k b_k &= a_0 B_0 + \sum_{k=1}^n a_k (B_k - B_{k-1}) \\ &= a_0 B_0 + \sum_{k=1}^n a_k B_k - \sum_{k=1}^n a_k B_{k-1} \end{aligned}$$

Puis par un décalage d'indice dans la seconde somme :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k b_k &= a_0 B_0 + \sum_{k=1}^n a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k B_k + a_n B_n - \sum_{k=0}^n a_{k+1} B_k \end{aligned}$$

En regroupant les sommes, on a montré ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^n a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k}$$

2. On suppose que la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

(a) La suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, donc :

$$\exists M > 0 \text{ tel que : } \forall n \in \mathbb{N}, |B_n| \leq M$$

On peut donc majorer :

$$|a_n B_n| = |a_n| |B_n| \leq M |a_n|$$

Or, la suite (a_n) convergeant vers 0, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} M |a_n| = 0$, et par la majoration ci-dessus :

$$\boxed{\text{La suite } (a_n B_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers 0.}}$$

(b) Considérons le terme général :

$$|(a_k - a_{k+1}) B_k| \leq |a_k - a_{k+1}| \times |B_k| \leq M |a_k - a_{k+1}|$$

La série $\sum |a_k - a_{k+1}|$ est convergente, donc par comparaison, la série $\sum |(a_k - a_{k+1}) B_k|$ est de même nature. Ainsi :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n - a_{n+1}) B_n \text{ est absolument convergente.}}$$

Cette série est donc convergente. Or, l'égalité prouvée à la question 1b, et la convergence de cette série ainsi que de la suite $(a_n B_n)$ permettent de conclure que la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^n a_k b_k \right)$ a une limite, c'est à dire :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n b_n \text{ est convergente.}}$$

3. En utilisant le fait que (a_n) est décroissante, puis un télescopage, on peut écrire que :

$$\sum_{k=0}^n |a_k - a_{k+1}| = \sum_{k=0}^n (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_{n+1}$$

On en déduit que la suite (a_n) et la série $\sum |a_k - a_{k+1}|$ sont de même nature : cette dernière série est donc convergente. Les hypothèses de la question 2 sont ainsi vérifiées, ce qui prouve que :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n b_n \text{ converge.}}$$

4. Si (a_n) décroît et tend vers 0 et si $b_n = (-1)^n$, on a $B_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair.} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

La suite (B_n) est donc bornée, ce qui permet d'appliquer le résultat de la question précédente. On retrouve par là le critère spécial des séries alternées :

$$\boxed{\text{Si la suite } (a_n) \text{ décroît et tend vers 0, la série } \sum (-1)^n a_n \text{ converge.}}$$

Partie II

1. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $C_n(x) + i S_n(x) = \sum_{k=1}^n e^{ikx}$ est une somme géométrique de

raison $e^{ix} \neq 1$, d'où l'égalité $C_n(x) + i S_n(x) = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} e^{ix}$. On a donc

$$\begin{aligned} C_n(x) + i S_n(x) &= \frac{e^{-\frac{inx}{2}} - e^{\frac{inx}{2}}}{e^{-\frac{ix}{2}} - e^{\frac{ix}{2}}} \frac{e^{\frac{inx}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}}} e^{ix} = \frac{-2i \sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{-2i \sin\left(\frac{x}{2}\right)} e^{\frac{i(n+1)x}{2}} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) + i \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \right), \end{aligned}$$

d'où en identifiant les parties réelles et imaginaires, $C_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right) \cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ et

$$S_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

On déduit de la première égalité que :

$$\frac{1}{2} + C_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2} \left[\sin\left(\frac{nx}{2} + \frac{(n+1)x}{2}\right) - \sin\left(\frac{nx}{2} - \frac{(n+1)x}{2}\right) \right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \boxed{\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)}}.$$

2. D'après ce qui précède, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|S_n(x)| \leq \frac{1}{\left| \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right|}$, la

suite $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc bornée. De plus la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge

vers 0. D'après **I.3.**, $\sum \frac{\sin nx}{n}$ converge. Ce résultat reste trivialement vrai lorsque $x \in 2\pi\mathbb{Z}$.

3.a. C'est évident.

3.b. On sait que $\sum_{k=1}^n \cos kt = C_n(t) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)}$. En intégrant entre x et π

cette égalité, il vient $\left[\sum_{k=1}^n \frac{\sin kt}{k} \right]_x^\pi = -\frac{1}{2}(\pi - x) + \int_x^\pi \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt$, d'où

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi - x}{2} - \frac{1}{2} \int_x^\pi \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt.$$

4.a. h est C^1 sur $[x, \pi]$ comme inverse d'une fonction l'étant. h' est continue sur le segment $[x, \pi]$, elle y est donc bornée.

4.b. On intègre par parties $\int_x^\pi h(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt$.

Les fonctions h et $g : t \mapsto -\frac{2}{2n+1} \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)$ sont de classe C^1 , on a

$\int_x^\pi h(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt = \int_x^\pi h(t) g'(t) dt$, donc cette intégration par parties est licite. Elle donne :

$$\int_x^\pi h(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt = \left[-\frac{2}{2n+1} \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) h(t) \right]_x^\pi + \frac{2}{2n+1} \int_x^\pi h'(t) \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt$$

$$\text{d'où : } \int_x^\pi h(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt = \frac{2}{2n+1} \left[\frac{\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin \frac{x}{2}} + \int_x^\pi h'(t) \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt \right].$$

4.c. En notant M un majorant de $|h'|$ sur $[x, \pi]$:

$$\begin{aligned} \left| \int_x^\pi h(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt \right| &\leq \frac{2}{2n+1} \left[\frac{\left| \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) \right|}{\sin \frac{x}{2}} + \int_x^\pi |h'(t) \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)| dt \right] \\ &\leq \frac{2}{2n+1} \left[\frac{1}{\sin \frac{x}{2}} + \int_x^\pi M dt \right], \end{aligned}$$

donc $\left| \int_x^\pi h(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt \right| \leq \frac{2}{2n+1} \left(\frac{1}{\sin \frac{x}{2}} + \pi - x \right)$. Il est alors clair que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_x^\pi h(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt = 0.$$

$$4.d. \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi - x}{2} - \frac{1}{2} \int_x^\pi \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_x^\pi \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt = 0$$

donnent immédiatement le résultat attendu lorsque $x \in]0, \pi[$. Pour $x = \pi$, ledit résultat est une évidence, et pour $x \in]\pi, 2\pi[$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx}{k} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin k(x - 2\pi)}{k} \text{ par périodicité} = - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin k(2\pi - x)}{k} \text{ par imparité} \\ &= - \frac{\pi - (2\pi - x)}{2} \text{ car } (2\pi - x) \in]0, \pi[, \end{aligned}$$

$$\text{on a donc encore } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx}{k} = - \frac{\pi - x}{2}.$$

Partie III

1.a. On applique le résultat de **1.1.** avec $a_p = \begin{cases} 0 & \text{si } p \leq m \\ \frac{1}{p} & \text{si } p > m \end{cases}$, $b_p = \sin p x$, et on obtient :

$$\sum_{p=m+1}^n \frac{\sin p x}{p} = \frac{S_n(x)}{n} + \sum_{p=0}^{n-1} (a_p - a_{p+1}) S_p(x). \text{ Dans la somme, } a_p - a_{p+1} \text{ vaut } 0 \text{ si } p < m,$$

vaut $-\frac{1}{m+1}$ et vaut $\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$ si $p > m$, d'où :

$$\sum_{p=m+1}^n \frac{\sin p x}{p} = \frac{S_n(x)}{n} + \sum_{p=m+1}^{n-1} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) S_p(x) - \frac{S_m(x)}{m+1}.$$

1.b. On en déduit que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{p=m+1}^n \frac{\sin p x}{p} \right| &\leq \frac{|S_n(x)|}{n} + \sum_{p=m+1}^{n-1} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) |S_p(x)| + \frac{|S_m(x)|}{m+1} \\ &\leq \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \left[\frac{1}{n} + \sum_{p=m+1}^{n-1} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) + \frac{1}{m+1} \right], \end{aligned}$$

et le télescopage habituel donne $\left| \sum_{p=m+1}^n \frac{\sin p x}{p} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \left[\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+1} \right].$

Par passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on a aussi $\left| \sum_{p=m+1}^{+\infty} \frac{\sin p x}{p} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \frac{2}{m+1}.$

2.a. Pour $0 \leq p \leq \left\lfloor \frac{\pi}{x} \right\rfloor = k$, $p x$ appartient à $[0, \pi]$; dans la somme $\sum_{p=1}^k \frac{\sin p x}{p}$, tous les termes

sont donc positifs, ce qui donne déjà $0 \leq \sum_{p=1}^k \frac{\sin p x}{p}$. De plus on sait (et on redémontre rapidement) que pour tout

$$t \geq 0, \text{ on a } \sin t \leq t. \text{ Donc } \sum_{p=1}^k \frac{\sin p x}{p} \leq \sum_{p=1}^k \frac{p x}{p} = k x = \left\lfloor \frac{\pi}{x} \right\rfloor x \leq \frac{\pi}{x} x = \pi.$$

2.b. Faire l'étude de fonctions habituelle.

2.c. D'après **1.b.**, $\left| \sum_{p=k+1}^n \frac{\sin p x}{p} \right| \leq \frac{2}{(k+1) \sin \frac{x}{2}}$. On a par définition d'une partie entière,

$$k+1 \geq \frac{\pi}{x}, \text{ d'autre part d'après } \mathbf{b.}, \sin \frac{x}{2} \geq \frac{x}{\pi}. \text{ Ainsi, } \left| \sum_{p=k+1}^n \frac{\sin p x}{p} \right| \leq 2.$$

$$\mathbf{3.} \quad \left| \sum_{p=k+1}^n \frac{\sin p x}{p} \right| \leq \left| \sum_{p=1}^k \frac{\sin p x}{p} \right| + \left| \sum_{p=k+1}^n \frac{\sin p x}{p} \right| = \sum_{p=1}^k \frac{\sin p x}{p} + \left| \sum_{p=k+1}^n \frac{\sin p x}{p} \right| \leq \pi + 2 :$$

tout a déjà été fait.

Problème 4

Sur les restes d'une série convergente

PARTIE I

1 Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{p=1}^n \frac{(-1)^p}{p}$. On constate que :

▷ la suite (S_{2n}) est décroissante car $S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \leq 0$.

▷ la suite (S_{2n+1}) est croissante car $S_{2n+3} - S_{2n+1} = \frac{-1}{2n+3} + \frac{1}{2n+2} \geq 0$.

▷ la différence $(S_{2n+1} - S_{2n})$ tend vers 0.

Les deux suites (S_{2n+1}) et (S_{2n}) sont donc adjacentes, et convergent donc vers la même limite. D'après le cours sur les suites, on peut donc en conclure que la suite (S_n) est convergente, ce qui revient exactement à dire que :

La série $\sum \frac{(-1)^p}{p}$ est convergente.

2.a Soient $n \in \mathbb{N}$ et $q \geq n+1$. En écrivant, pour tout $p \in \llbracket n+1, q \rrbracket$, que $\frac{1}{p} = \int_0^1 x^{p-1} dx$, on peut en déduire :

$$\sum_{p=n+1}^q \frac{(-1)^p}{p} = \sum_{p=n+1}^q (-1)^p \int_0^1 x^{p-1} dx = - \sum_{p=n+1}^q \int_0^1 (-1)^{p-1} x^{p-1} dx = - \int_0^1 \sum_{p=n+1}^q (-x)^{p-1} dx$$

En remarquant que $-x \neq 1$, on peut alors utiliser le cours sur les suites géométriques pour écrire :

$$\sum_{p=n+1}^q \frac{(-1)^p}{p} = - \int_0^1 (-x)^n \frac{1 - (-x)^{q-n}}{1 - (-x)} dx$$

En développant, on obtient exactement le résultat annoncé :

$$\sum_{p=n+1}^q \frac{(-1)^p}{p} = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx + (-1)^q \int_0^1 \frac{x^q}{1+x} dx$$

2.b Nous allons faire tendre l'entier q vers $+\infty$ dans l'égalité précédente. On remarque pour cela que :

$$\left| (-1)^q \int_0^1 \frac{x^q}{1+x} dx \right| = \int_0^1 \frac{x^q}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^q dx = \frac{1}{q+1}$$

ce qui démontre que : $\lim_{q \rightarrow +\infty} (-1)^q \int_0^1 \frac{x^q}{1+x} dx = 0$. On déduit alors directement de la question **2.a** que :

$$R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$

3.a Nous allons effectuer l'intégration par parties suggérée en écrivant $\frac{x^n}{1+x} = x^{n-1} \times \frac{x}{1+x}$, en primitivant $x \mapsto x^{n-1}$ et en dérivant $x \mapsto \frac{x}{1+x}$. On obtient :

$$\begin{aligned} R_n &= (-1)^{n+1} \int_0^1 x^{n-1} \frac{x}{1+x} dx \\ &= (-1)^{n+1} \left\{ \left[\frac{x^n}{n} \frac{x}{1+x} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^n}{n} \times \frac{1}{(1+x)^2} dx \right\} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + \frac{(-1)^n}{n} \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx \end{aligned}$$

Les constantes $k = \frac{1}{2}$ et $\beta = 1$ semblent donc convenir. Il reste juste à montrer que :

$$\frac{(-1)^n}{n} \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

c'est-à-dire, que la quantité $n \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx$ est bornée. Or, on trouve :

$$\left| n \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx \right| \leq n \int_0^1 x^n dx = \frac{n}{n+1} \leq 1$$

ce qui termine la démonstration. En conclusion :

$$R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

3.b D'après la question 1., la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, donc, la série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$ l'est aussi. Par ailleurs, puisque la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, la série $\sum O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge aussi. En conclusion :

La série $\sum R_n$ est convergente.

4 Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on peut écrire, d'après la question 2.b :

$$\sum_{n=0}^p R_n = \sum_{n=0}^p (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = - \int_0^1 \frac{1}{1+x} \sum_{n=0}^p (-x)^n dx$$

Puisque x varie entre 0 et 1, le réel $-x$ est nécessairement différent de 1, ce qui permet d'obtenir :

$$\sum_{n=0}^p R_n = - \int_0^1 \frac{1}{1+x} \frac{1 - (-x)^{p+1}}{1 - (-x)} dx = - \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx + (-1)^{p+1} \int_0^1 \frac{x^{p+1}}{(1+x)^2} dx \quad (*)$$

Or, on constate que $\lim_{p \rightarrow +\infty} (-1)^{p+1} \int_0^1 \frac{x^{p+1}}{(1+x)^2} dx = 0$ car :

$$\left| (-1)^{p+1} \int_0^1 \frac{x^{p+1}}{(1+x)^2} dx \right| = \int_0^1 \frac{x^{p+1}}{(1+x)^2} dx \leq \int_0^1 x^{p+1} dx = \frac{1}{p+2} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$$

En passant à la limite dans l'égalité (*) lorsque p tend vers $+\infty$, on obtient donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = - \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx = \left[\frac{1}{1+x} \right]_0^1$$

En conclusion :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = -\frac{1}{2}$$

PARTIE II

5 Nous avons affaire à une série alternée. Puisque la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est décroissante et tend vers 0, on peut utiliser le critère spécial des séries alternées pour affirmer que :

La série $\sum \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}$ est convergente.

6 Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $V_n = U_n - \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}} dx$. Nous allons démontrer que la suite (V_n) est décroissante et minorée, ce qui prouvera qu'elle est convergente. On trouve tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \int_n^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

Déterminons le signe de cette dernière quantité. Démontrons pour cela l'encadrement suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (**)$$

Pour démontrer l'encadrement (**), fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et utilisons la décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ sur l'intervalle $[n, n+1]$. On obtient :

$$\forall t \in [n, n+1], \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

En intégrant cet encadrement sur $[n, n+1]$, on en déduit immédiatement le résultat (**) annoncé. On en déduit que $V_{n+1} - V_n \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui démontre la décroissance de la suite (V_n) . On trouve d'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$V_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{p}} - \sum_{p=1}^{n-1} \int_p^{p+1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{\sqrt{n}} + \sum_{p=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\sqrt{p}} - \int_p^{p+1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt \right) \underset{\text{d'après } (**)}{\geq} 0$$

La suite (V_n) est donc convergente, et en notant $L + 2$ sa limite, on peut donc écrire :

$$\text{Il existe } L \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(U_n - \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}} dx \right) = L + 2$$

7.a Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On peut écrire :

$$r_{2n} = \sum_{p=2n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}} - \sum_{p=1}^{2n} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}} = S_2 - \sum_{p=1}^{2n} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}$$

Or, en séparant dans cette dernière somme les indices pairs et les indices impairs, on déduit :

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{2n} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}} &= \sum_{\substack{1 \leq p \leq 2n \\ p \text{ pair}}} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}} + \sum_{\substack{1 \leq p \leq 2n \\ p \text{ impair}}} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k}} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k}} \right) \\ &= 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sqrt{2} U_n - U_{2n} \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, r_{2n} = S_2 - \sqrt{2} U_n + U_{2n}$$

7.b Utilisons le résultat de l'énoncé. On obtient :

$$r_{2n} = S_2 - \sqrt{2} \left[2\sqrt{n} + L + \frac{1}{2\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \right] + \left[2\sqrt{2n} + L + \frac{1}{2\sqrt{2n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \right]$$

ce qui se simplifie en :

$$r_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} S_2 + (1 - \sqrt{2})L - \frac{1}{2\sqrt{2n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

7.c La suite (r_n) est définie comme le reste d'une série convergente, donc, cette suite tend vers 0. On en déduit que $S_2 + (1 - \sqrt{2})L = 0$, c'est-à-dire :

$$S_2 = (\sqrt{2} - 1)L$$

Les deux résultats précédents permettent d'affirmer que :

$$r_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{2\sqrt{2n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

Déterminons un résultat analogue concernant r_{2n+1} . On trouve :

$$\begin{aligned} r_{2n+1} &= r_{2n} - \frac{(-1)^{2n+1}}{\sqrt{2n+1}} = -\frac{1}{2\sqrt{2n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2n+1}} + \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{2n+1}} - \frac{1}{2\sqrt{2n}}}_{O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

On peut donc écrire :

$$r_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^{n+1}}{2\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

Or, la série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{2\sqrt{n}}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées, et la série $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ converge absolument, donc, la série $\sum O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ converge également. En conclusion :

$$\text{La série } \sum r_n \text{ est convergente}$$

Problème 5

Lemme de Césàro généralisé

1.a Considérons $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, la suite (v_n) tend vers ℓ , donc :

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, |v_n - \ell| \leq \varepsilon$$

On peut alors écrire, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$|w_n - \ell| = \left| \frac{\sum_{k=0}^n u_k v_k}{\sum_{k=0}^n u_k} - \frac{\sum_{k=0}^n u_k}{\sum_{k=0}^n u_k} \ell \right| = \left| \frac{\sum_{k=0}^n u_k (v_k - \ell)}{\sum_{k=0}^n u_k} \right| \leq \frac{\sum_{k=0}^n u_k |v_k - \ell|}{\sum_{k=0}^n u_k}$$

On obtient donc, pour $n \geq N_0$:

$$|w_n - \ell| \leq \frac{\sum_{k=0}^{N_0-1} u_k |v_k - \ell|}{\sum_{k=0}^n u_k} + \frac{\sum_{k=N_0}^n u_k \times \varepsilon}{\sum_{k=0}^n u_k} \leq \frac{\sum_{k=0}^{N_0-1} u_k |v_k - \ell|}{\sum_{k=0}^n u_k} + \varepsilon$$

Posons $C = \sum_{k=0}^{N_0-1} u_k |v_k - \ell|$. Par hypothèse, la suite $\left(\sum_{k=0}^n u_k \right)_{n \geq 0}$ tend vers $+\infty$, donc :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, \frac{C}{\sum_{k=0}^n u_k} \leq \varepsilon$$

On trouve donc, pour $n \geq \max(N_0, N_1)$: $|w_n - \ell| \leq 2\varepsilon$. On peut donc conclure :

La suite (w_n) converge vers ℓ .

1.b La convergence de la suite (w_n) n'entraîne pas celle de (v_n) . Par exemple, si on pose $v_n = (-1)^n$ et $u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

donc, la suite (w_n) converge vers 0. Pourtant, la suite (v_n) ne converge pas. Ainsi :

La convergence de la suite (w_n) n'implique pas celle de la suite (v_n) .

2 Posons, pour tout $n \geq 1$: $a_n = \left[\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k} \right) \right]^{\frac{1}{n}}$. La suite (a_n) est constituée de réels strictement positifs, ce qui permet de poser, pour tout $n \geq 1$:

$$b_n = \ln(a_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$$

Il est alors possible d'appliquer le résultat de la question 1.a avec :

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 & \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n &= 1 \\ v_0 &= 0 & \forall n \in \mathbb{N}^*, v_n &= \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

La suite (v_n) tend clairement vers 0, donc, d'après 1.a, la suite (b_n) tend vers 0, donc, $(a_n) = (e^{b_n})$ tend vers 1. En conclusion :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k} \right) \right]^{\frac{1}{n}} = 1$$

3.a D'après l'hypothèse de la question, la suite $\left(\frac{v_n}{u_n} \right)$ tend vers 1. Puisque la série à termes positifs $\sum u_n$ est divergente, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k = +\infty$, donc, d'après la question 1.a, on peut dire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=0}^n u_k \times \frac{v_k}{u_k}}{\sum_{k=0}^n u_k} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=0}^n v_k}{\sum_{k=0}^n u_k} = 1$$

Cela revient exactement à écrire que :

$$\text{Les sommes partielles } \left(\sum_{k=0}^n u_k \right) \text{ et } \left(\sum_{k=0}^n v_k \right) \text{ sont des suites équivalentes.}$$

3.b Posons, pour $n \geq 1$: $a_n = \ln(n)$. On trouve :

$$a_{n+1} - a_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \sim \frac{1}{n}$$

Les deux séries $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum (a_{n+1} - a_n)$ sont à termes strictement positifs, et sont divergentes (elles sont de même nature et l'une d'entre elles est la série harmonique). On peut donc dire, d'après la question 3.a que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1 = \ln(n+1) \sim \ln(n)$$

Finalement :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$$

3.c Posons, pour $n \geq 1$: $x_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln(n)$. Pour démontrer la convergence de la suite (x_n) , on peut utiliser la suite (y_n) définie par $y_n = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \right) - \ln(n)$ et démontrer que les deux suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes. On peut aussi écrire, pour tout $n \geq 1$:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \quad (1)$$

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{1}{k} - \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \right] \quad (2)$$

Or, si $k \in \mathbb{N}^*$ et si on intègre entre k et $k+1$ l'encadrement

$$\forall t \in [k, k+1], \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$$

on obtient l'encadrement classique :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k+1} \leq \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \leq \frac{1}{k}$$

D'après (1), on peut alors dire que la suite (x_n) est décroissante, et d'après (2), on peut dire que (x_n) est positive, donc, minorée par 0. La suite (x_n) est donc convergente. Finalement :

La suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)\right)$ est convergente.

4 Si la série $\sum u_n$ converge, la suite de ses sommes partielles (S_n) est convergente. Le théorème de Césaro généralisé appliqué alors avec $v_k = S_k$ et $u_k = 1$ permet alors de dire que la suite (σ_n) est convergente, c'est-à-dire que la série $\sum u_n$ converge au sens de Césaro. Ainsi :

Si la série $\sum u_n$ converge, alors, elle converge au sens de Césaro.

5.a Introduisons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + x^2$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, décroissante sur $]-\infty, -\frac{1}{2}]$ et croissante sur $[-\frac{1}{2}, +\infty[$. On constate que l'intervalle $I = [-\frac{1}{2}, +\infty[$ est stable par f , donc, puisque u_0 appartient à cet intervalle, il en est de même de tous les autres termes de la suite (u_n) . La fonction f étant croissante sur I , la suite (u_n) est monotone, et puisque $x \mapsto f(x) - x$ est positive sur $\mathbb{R}$, la suite (u_n) est croissante. Enfin, puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, la seule limite possible de (u_n) , en cas de convergence, est une solution de l'équation $f(x) = x$, c'est-à-dire 0. On discute alors suivant les valeurs de u_0 :

- Si $u_0 < 0$, tous les termes de la suite appartiennent à $[-\frac{1}{2}, 0[$. La suite est donc croissante et majorée par 0, donc, converge, et sa limite est nécessairement 0.
- Si $u_0 = 0$, la suite est constante et égale à 0
- Si $u_0 > 0$, tous les termes de la suite appartiennent à $]0, +\infty[$. Si la suite (u_n) convergeait, sa limite ℓ vérifierait $\ell \geq u_0$ (car elle est croissante), donc, on aurait $\ell > 0$, ce qui est impossible. La suite (u_n) est donc une suite croissante qui ne converge pas, donc, elle tend vers $+\infty$.

En conclusion :

Si $u_0 \in [-\frac{1}{2}, 0]$, alors, (u_n) converge vers 0, et si $u_0 > 0$, alors, (u_n) tend vers $+\infty$.

5.b.i Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on trouve :

$$v_{n+1} = -u_{n+1} = -u_n - u_n^2 = v_n - v_n^2$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n - v_n^2$$

Par hypothèse, la suite (u_n) est convergente mais pas stationnaire. On peut donc dire, d'après la question 5.a, que $u_0 \in [-\frac{1}{2}, 0[$ et que la suite (u_n) converge vers 0. Il en résulte que la suite (v_n) est constituée elle aussi de termes tous non nuls, et qu'elle converge vers 0. En divisant chaque membre de l'égalité ci-dessus par v_n , on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - v_n$$

et on peut donc affirmer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = 1$, donc :

$$v_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$$

5.b.ii On obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_n = \frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_{n-1}} = \frac{v_{n-1} - v_n}{v_{n-1}v_n} = \frac{v_{n-1}^2}{v_{n-1}v_n} = \frac{v_{n-1}}{v_n}$$

et on peut donc conclure, grâce à la question précédente :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$$

En utilisant la question 1.a, on peut alors écrire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{v_k} - \frac{1}{v_{k-1}} \right) = 1$$

La dernière somme rencontrée est télescopique, et la limite se résume à $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_0} \right) = 1$, soit encore

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nv_n} = 1$. On en déduit :

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

5.b.iii L'équivalent précédent permet de dire que la suite (v_n) est positive à partir d'un certain rang, et puisque la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente, on peut dire, par comparaison de séries à termes positifs :

La série $\sum v_n$ est divergente.

La suite (v_n) tend vers 0, donc, on peut écrire $\sin(v_n^2) \sim v_n^2 \sim \frac{1}{n^2}$. Cet équivalent permet de dire que la suite $(\sin(v_n^2))$ est positive à partir d'un certain rang, et puisque la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, on peut dire, par comparaison de séries à termes positifs :

La série $\sum \sin(v_n^2)$ est convergente.

On a $\frac{v_n}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, donc, puisque la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est convergente, on déduit, par comparaison de séries à termes positifs, que :

La série $\sum \frac{v_n}{\sqrt{n}}$ est convergente.

5.b.iv La suite (a_n) tend vers 1 d'après la question 5.b.ii, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$$

Plus précisément, on peut écrire :

$$b_n = a_n - 1 = \frac{v_{n-1}}{v_n} - 1 = \frac{v_{n-1} - v_n}{v_n} = \frac{v_{n-1}^2}{v_n} \sim \frac{\frac{1}{(n-1)^2}}{\frac{1}{n}}$$

ce qui permet de conclure :

$$b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

5.b.v La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente, donc, d'après l'équivalent précédent et les questions 3.a et 3.b, on peut dire que :

$$\sum_{k=1}^{n-1} b_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n-1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$$

Or : $\sum_{k=1}^{n-1} b_k = \sum_{k=1}^{n-1} a_k - (n-1) = \frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_0} - (n-1)$. Donc, on peut écrire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_0} - (n-1)}{\ln(n)} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{v_n} - n}{\ln(n)} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n}{v_n} \left(\frac{1}{n} - v_n \right)}{\ln(n)} = 1$$

On déduit donc l'équivalent $\frac{1}{n} - v_n \sim \frac{v_n \ln(n)}{n} \sim \frac{\ln(n)}{n^2}$. Puisque $\frac{\ln(n)}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$, on peut écrire successivement, par comparaison de séries à termes positifs, que $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$ converge, puis que $\sum \left(\frac{1}{n} - v_n\right)$ converge, donc, finalement :

La série $\sum t_n$ converge.