Séances de prérentrée

I – Développements limités et relations de comparaison

Exercice 1

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de $f : x \mapsto \cos(x)\operatorname{ch}(x)$.

2. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 3 de la fonction $g : x \mapsto \sqrt{1+x}$.

3. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de la fonction $h : x \mapsto \exp(\tan x)$.

Exercice 2

Donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de :

1. $w_n = \left(\dfrac{3^{\frac{1}{n}} + 4^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n$. **2.** $x_n = \left(n \sin \dfrac{1}{n}\right)^{n^2} - e^{-\frac{1}{6}}$. **3.** $v_n = n!\sin\left(\left(e - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\right)\pi\right)$.

Exercice 3

1. Pour quelles valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ la série de terme général $\ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$ est – elle convergente ?

2. Calculer alors la somme de cette série.

Exercice 4

Lemme de Cesàro

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers un réel λ. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $b_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$.

On souhaite prouver le lemme de Cesàro : la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et admet pour limite λ.

1. Ecrire la définition mathématique du fait que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lambda$.

2. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que : $\exists N_1 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq N_1, \left|\dfrac{1}{n+1}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\right) - \lambda\right| \leq \dfrac{1}{n+1}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{N_1 - 1} |a_k - \lambda|\right) + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

3. En déduire que : $\exists N_2 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq N_2, |b_n - \lambda| \leq \varepsilon$. Conclure.

Exercice 5

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son premier terme u_0 strictement positif, et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\arctan u_n.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose également : $v_n = 2^n u_n$.

1. Etudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente.

3. Etudier la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

4. Démontrer que : $\ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{u_n^{\,2}}{3}$, et en déduire la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0} \ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right)$.

On note K la somme de cette série.

5. Déterminer, en fonction de K, un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 6

Soient $A \in \mathbb{R}_+^*$, et f une application définie, continue sur l'intervalle ouvert $I = \left]-A, A\right[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose $J = I \cap \mathbb{R}_+^*$, et l'on suppose que :

- $\forall\, x \in J\ ,\ 0 < f(x) < x$.
- •• f admet en 0 un développement limité de la forme : $f(x) \underset{0}{=} x - a\,x^k + o\left(x^k\right)$,

où $a \in \mathbb{R}_+^*$ et k est un entier strictement supérieur à 1. Soit enfin $u_0 \in J$.

1. Montrer que l'on définit bien une suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de son premier terme u_0 et par la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+1} = f\left(u_n\right).$$

Prouver la convergence de la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, et déterminer sa limite.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\beta \in \mathbb{R}$, on pose : $v_n = u_{n+1}^{\beta} - u_n^{\beta}$.

Montrer qu'il existe un unique $\beta \in \mathbb{R}$ tel que la suite $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ***non nul***.

En déduire alors que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\left(k-1\right)a\,n\right)^{\frac{1}{1-k}}$ *on pourra utiliser le lemme de Cesàro démontré en exercice* **4**.

3. On pose $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin\left(u_n\right)$. Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 7

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note f_n l'application définie par : $\forall\, x \in \mathbb{R}\ ,\ f_n(x) = \mathrm{e}^{n x} + x - 2$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel en lequel f_n s'annule. On notera désormais u_n ce réel.

2. Montrer que la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie est décroissante.

3. Montrer que la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et admet pour limite 0.

4. a. En remarquant que $n\,u_n = \ln\left(2 - u_n\right)$, montrer que $u_n \sim \dfrac{\ln(2)}{n}$;

b. en déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{\ln(2)}{n} - \dfrac{\ln(2)}{2\,n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$;

c. prouver enfin l'existence d'un réel a, que l'on déterminera, tel que : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{\ln(2)}{n} - \dfrac{\ln(2)}{2\,n^2} + \dfrac{a}{n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

Exercice 8

Soit $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers ℓ. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \dfrac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}u_k$.

Montrer que la suite $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.