Séances de prérentrée

2 – Etude de séries

Exercice 1

Etudier la nature, et, le cas échéant, déterminer la somme des séries suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{2n + 3^n}{4^{n+1}}$ **2.** $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{\cos(n)\, \mathrm{e}^{-n}}{n!}$ **3.** $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)^2}{3^n}$

4. $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{n^3}{2^n}$ **5.** $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{(n+1)^2}{n\,!}$ **6.** $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{n\,!}$

7. $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ **8.** $\displaystyle\sum_{n \geq 3} \frac{4n - 2}{n\left(n^2 - 4\right)}$.

Exercice 2

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ dans chacun des cas suivants :

α_ $u_n = \dfrac{\sin\left(\ln\left(\sqrt{n}\right)\right)}{n^{\frac{5}{3}}}$. **β_** $u_n = \left[\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right]$.

χ_ $u_n = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{4}}\left(\ln n\right)^2}$. **δ_** $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$.

Exercice 3

Nature, et le cas échéant somme, de la série $\sum u_n$, dans chacun des cas suivants :

α_ $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+3)}$. **β_** $u_n = \ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$.

χ_ $u_n = \dfrac{n^3}{n\,!}$. **δ_*** $u_n = \arctan\left(\dfrac{1}{1 + n + n^2}\right)$.

Exercice 4

Soient $A \in \mathbb{R}_+^*$, et f une application définie, continue sur l'intervalle ouvert $I = \left]-A, A\right[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose $J = I \cap \mathbb{R}_+^*$, et l'on suppose que :

- $\forall x \in J,\ 0 < f(x) < x$.
- •• f admet en 0 un développement limité de la forme : $f(x) \underset{0}{=} x - a x^k + o\left(x^k\right)$,

où $a \in \mathbb{R}_+^*$ et k est un entier strictement supérieur à 1. Soit enfin $u_0 \in J$.

1. Montrer que l'on définit bien une suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ par la donnée de son premier terme u_0 et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f\left(u_n\right).$$

Prouver la convergence de la suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$, et déterminer sa limite.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\beta \in \mathbb{R}$, on pose : $v_n = u_{n+1}^{\beta} - u_n^{\beta}$.

Montrer qu'il existe un unique $\beta \in \mathbb{R}$ tel que la suite $\left(v_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ***non nul***.

En déduire alors que $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \left((k-1)an\right)^{\frac{1}{1-k}}$ *on pourra utiliser le lemme de Cesàro démontré en séance 1.*

3. On pose $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin\left(u_n\right)$. Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 5

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} a_n$. *On pourra penser aux sommes de Riemann.*

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_{2n} = a_n$.

b. Retrouver alors la somme de la série harmonique alternée $\displaystyle\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Exercice 6

Théorème spécial des séries alternées

1. Soit $\displaystyle\sum_{n \geq 0} u_n$ une série numérique réelle. On suppose que :

- • $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.
- •• La suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- ••• $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 0 = 0$.

Montrer que la série $\sum (-1)^n u_n$ converge.

2. Déterminer la nature de la série harmonique alternée $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Exercice 7

1. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$.

2. En déduire la nature de la série de terme général $\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$.