Séance de prérentrée 2

Corrigés

Exercice 1

L'idée est ici de se ramener à des séries usuelles exponentielles, géométriques ou géométriques dérivées.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{2n+3^n}{4^{n+1}} = 2n\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1} + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n = \dfrac{1}{8}n\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

La série géométrique dérivée $\sum\limits_{n\geq 0} n\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$, de raison $\dfrac{1}{4}$, converge car $\left|\dfrac{1}{4}\right| < 1$, et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{16}{9}$$

(le terme d'indice 0 est nul). La série géométrique $\sum\limits_{n\geq 0}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ converge car sa raison est strictement inférieure à 1 en valeur absolue, et l'on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n = \dfrac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4$. Par linéarité, la série $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{2n+3^n}{4^{n+1}}$ est donc convergente, et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n+3^n}{4^{n+1}} = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{4}{9} + 1 = \boxed{\frac{13}{9}}.$$

2. Une formule d'Euler donne pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\cos(n)\,e^{-n}}{n!} = \frac{e^{in}+e^{in}}{2}\,\frac{\cos(n)\,e^{-n}}{n!} = \frac{1}{2}\frac{\left(e^{i+1}\right)^n}{n!} + \frac{1}{2}\frac{\left(e^{-i+1}\right)^n}{n!}.$$

Les séries exponentielles $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{\left(e^{i+1}\right)^n}{n!}$ et $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{\left(e^{-i+1}\right)^n}{n!}$ sont convergentes, de sommes respectives :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(e^{i+1}\right)^n}{n!} = \exp\left(e^{i+1}\right) = \exp\left(e\cos(1) + i\,e\sin(1)\right) = e^{e\cos(1)}\left(\cos\left(e\sin(1)\right) + i\sin\left(e\sin(1)\right)\right)$$

et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\left(e^{-i+1}\right)^n}{n!} = e^{e\cos(1)}\left(\cos\left(e\sin(1)\right) - i\sin\left(e\sin(1)\right)\right)$ (même technique).

Par linéarité, la série $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{\cos(n)\,e^{-n}}{n!}$ est donc elle aussi convergente, et

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(n)\,e^{-n}}{n!} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(e^{i+1}\right)^n}{n!} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(e^{-i+1}\right)^n}{n!} = e^{e\cos(1)}\cos\left(e\sin(1)\right)}.$$

3. Pour tout $N \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{(n+1)^2}{n!} &= \sum_{n=1}^{N} \frac{n^2+2n+1}{n!} = \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{(n-1)!} + 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{n+1}{n!} + 2\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} + \left(\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}\right) - 1\right) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} + 2\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} + \left(\left(\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!}\right) - 1 + \frac{1}{N!}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{n}{n!} + 4\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} + \left(\frac{1}{N!} - 1\right) \\
&= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{(n-1)!} + 4\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} + \left(\frac{1}{N!} - 1\right) \\
&= \sum_{n=0}^{N-2} \frac{1}{n!} + 4\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} + \left(\frac{1}{N!} - 1\right) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} + 4\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} + \left(\frac{1}{N!} - 1 - \frac{1}{(N-1)!}\right) \\
&= 5\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} + \left(\frac{1}{N!} - 1 - \frac{1}{(N-1)!}\right)
\end{aligned}$$

Le cours donne $\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} = e$, et il est clair que $\lim_{N \to +\infty} \left(\frac{1}{N!} - 1 - \frac{1}{(N-1)!}\right) = 0$.

Donc $\boxed{\text{la série } \sum_{n \geq 1} \frac{(n+1)^2}{n!} \text{ converge, et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} = 5e - 1}$.

4. On transforme de manière à se ramener à des séries géométriques dérivées. Par exemple (mais d'autres transformations sont possibles),

$$\begin{aligned}
n^3 &= (n+1)(n+2)(n+3) - 6n^2 - 11n - 6 \\
&= (n+1)(n+2)(n+3) - 6(n+1)(n+2) + 7n + 6 \\
&= (n+1)(n+2)(n+3) - 6(n+1)(n+2) + 7(n+1) - 1,
\end{aligned}$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{n^3}{2^n} = (n+1)(n+2)(n+3)\left(\frac{1}{2}\right)^n - 6(n+1)(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^n + 7(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Les séries géométriques dérivée troisième, dérivée seconde, dérivée tout court et la série géométrique intervenant ici sont

toutes convergentes, car de raison strictement inférieure à 1 en valeur absolue. Par linéarité, $\sum_{n \geq 0} \frac{n^3}{2^n}$ converge, et :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{2^n} &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)(n+3)\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) - 6\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \\
&\quad + 7\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) - \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \\
&= \left(\frac{3!}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^4}\right) - 6\left(\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}\right) + 7\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}\right) - \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = 96 - 96 + 28 - 2,
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{2^n} = 26}$.

5. $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!}$ converge (série exponentielle) et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}$: c'est du cours.

6. $\boxed{\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{n!} \text{ diverge grossièrement}}$: en effet, $\displaystyle\lim \left(\frac{n^n}{n!} \right) = +\infty$ par croissance comparée.

8. La technique est archi – classique : on a $\displaystyle\frac{4n-2}{n(n^2-4)} = \frac{4n-2}{n(n-2)(n+2)}$, et l'on cherche donc a, b et c tels

que pour tout $n \geq 3$, $\displaystyle\frac{4n-2}{n(n^2-4)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+2} + \frac{c}{n-2}$. On obtient après calculs :

$$\frac{4n-2}{n(n^2-4)} = \frac{1}{2}\frac{1}{n} - \frac{5}{4}\frac{1}{n+2} + \frac{3}{4}\frac{1}{n-2},$$

et on en déduit que pour tout $N \geq 3$: $\displaystyle\sum_{n=3}^{N} \frac{4n-2}{n(n^2-4)} = \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n} - \frac{5}{4}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n+2} + \frac{3}{4}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n-2}$.

Il ne reste plus qu'à achever le télescopage :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=3}^{N} \frac{4n-2}{n(n^2-4)} &= \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n} - \frac{5}{4}\sum_{n=5}^{N+2}\frac{1}{n} + \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{N-2}\frac{1}{n} \quad \text{changements d'indices} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \left(\sum_{n=5}^{N-2} \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N} \right) \\
&\quad - \frac{5}{4}\left(\left(\sum_{n=5}^{N-2} \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} \right) \\
&\quad + \frac{3}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \left(\sum_{n=5}^{N-2} \frac{1}{n} \right) \right) \\
&= \frac{8+6+36+18+12+9}{48} - \frac{3}{4}\frac{1}{N-1} - \frac{3}{4}\frac{1}{N} - \frac{5}{4}\frac{1}{N+1} - \frac{5}{4}\frac{1}{N+2},
\end{aligned}$$

donc $\displaystyle\sum_{n=3}^{N} \frac{4n-2}{n(n^2-4)} \underset{N \to +\infty}{=} \frac{89}{48} + o(1)$. Bref, $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=3}^{N} \frac{4n-2}{n(n^2-4)} = \frac{89}{48}$, donc

$\boxed{\displaystyle\sum_{n \geq 3} \frac{4n-2}{n(n^2-4)} \text{ converge, et } \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{4n-2}{n(n^2-4)} = \frac{89}{48}}$.

Exercice 2

α_ $\displaystyle |u_n| \leq \frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}$. D'après le critère de Riemann, la série $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

β_ On a $\displaystyle u_n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n} \right) \right) - \frac{1}{e}$, d'où : $\displaystyle u_n = \exp\left(n \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \right) - \frac{1}{e}$, puis après

simplification : $\displaystyle u_n = \exp\left(-1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n} \right) \right) - \frac{1}{e} = e^{-1}\left[\exp\left(-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n} \right) \right) - 1 \right]$.

On en déduit que $u_n = \exp\left(-1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{1}{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{-1}\left[1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right]$, d'où : $u_n \sim \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2}\frac{1}{n}$.

D'après le critère de Riemann, la série $\sum u_n$ est donc divergente.

χ_ $\sum_{n \geq 2} u_n$ est à terme général positif. On se doute que cette série diverge ; pour le prouver, on compare u_n au terme général d'une série de Riemann divergente, suivant la règle du " $n^\alpha u_n$ " : on cherche donc $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes : $\begin{cases} \lim n^\alpha u_n = +\infty \text{ (pour avoir } \frac{1}{n^\alpha} = o(u_n)) \\ \alpha \leq 1 \text{ (pour que } \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ diverge)} \end{cases}$. On constate que $\alpha = 1$ convient, car on a bien

$\lim n\, u_n = \lim \frac{n^{1/4}}{\ln^2(n)} = +\infty$ par croissances comparées.

On récapitule ? la série de Riemann $\sum \frac{1}{n}$ diverge, $\frac{1}{n} = o(u_n)$ et (u_n) est à terme général positif. On en conclut que la série $\sum u_n$ est divergente.

δ_ On passe à nouveau sous forme exponentielle :

$$u_n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \exp\left(n \ln\left(-\frac{1}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp\left(-\sqrt{n} + O(1)\right),$$

d'où $u_n = O\left(\exp\left(-\sqrt{n}\right)\right)$.

Par croissances comparées, $X^4 \exp(-X) \underset{X \to +\infty}{\to} 0$. Donc, $n^2 \exp\left(-\sqrt{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\to} 0$.

Il en résulte que $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et ainsi, d'après la règle de Riemann, la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

Exercice 3

α_ Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+3)}$. On décompose la fraction rationnelle $\frac{1}{X(X+1)(X+3)}$ en éléments simples, et l'on cherche donc α, β, γ tels que :

$\frac{1}{X(X+1)(X+3)} = \frac{\alpha}{X} + \frac{\beta}{X+1} + \frac{\gamma}{X+3}$. On obtient :

$\frac{1}{X(X+1)(X+3)} = \frac{1/3}{X} - \frac{1/2}{X+1} + \frac{1/6}{X+3}$.

Par suite, $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{6}\frac{1}{k+3}\right)$. Après séparation des sommes, et changements d'indices :

$S_n = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} + \frac{1}{6}\sum_{k=4}^{n+3}\frac{1}{k}$, soit en notant $H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$:

$S_n = \cancel{\frac{1}{3}H_n} - \frac{1}{2}\left(-1 + \cancel{H_n} + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{6}\left(-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cancel{H_n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right)$, ou encore :

$S_n = \frac{7}{18} + O\left(\frac{1}{n}\right)$. Finalement, $\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{7}{18}$, ce qui revient à dire que la série $\sum u_n$ converge, et que

$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{7}{18}$.

β_ Posons, pour tout $n \geq 2$, $S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k$. On a

$S_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2 - 1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n} \left(\ln(k-1) + \ln(k+1) - 2\ln(k)\right)$. A nouveau, on sépare les sommes, et l'on change d'indice dans les deux premières d'entre elles.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \ln k + \sum_{k=3}^{n+1} \ln k - 2\sum_{k=2}^{n} \ln k = \sum_{k=2}^{n-1} \ln k + \sum_{k=3}^{n+1} \ln k - 2\sum_{k=2}^{n} \ln k,$$

Et donc : $S_n = \left(\sum_{k=2}^{n} \ln k - \ln(n)\right) + \left(-\ln(2) + \sum_{k=2}^{n} \ln k + \ln(n+1)\right) - 2\sum_{k=2}^{n} \ln k$.

Finalement, $S_n = \left(\sum_{k=2}^{n} \ln k - \ln(n)\right) + \left(-\ln(2) + \sum_{k=2}^{n} \ln k + \ln(n+1)\right) - 2\sum_{k=2}^{n} \ln k$, soit :

$S_n = -\ln(2) + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

Par passage à la limite : la série $\sum u_n$ converge, et $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = -\ln(2)$.

χ_ Posons pour tout $n \geq 0$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On a

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k^3}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{k!} && \text{terme d'indice } 1 \text{ nul} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)^2}{k!} && \text{changement d'indice} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k(k-1) + 3k + 1}{k!} && \text{arrangement du numérateur en vue de simplifications ultérieures} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k(k-1)}{k!} + 3\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{k!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \\
&= \sum_{k=2}^{n-1} \frac{k(k-1)}{k!} + 3\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} && \text{supression de termes nuls} \\
&= \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(k-2)!} + 3\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k-1)!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n-3} \frac{1}{k!} + 3\sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}
\end{aligned}$$

La série exponentielle $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!}$ converge, et sa somme vaut e. On en déduit que $\lim S_n = 5\,\mathrm{e}$:

$\sum u_n$ converge, et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 5\,\mathrm{e}$.

δ_ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{(k+1) - k}{1 + k(k+1)}\right)$. La formule $\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$

donne alors $\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\arctan(k+1) - \arctan(k)\right)$, d'où par télescopage,

$\sum_{k=1}^{n} u_k = \arctan(n+1) - \arctan(1)$.

On en déduit que $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$: $\sum u_n$ converge, et $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 4

1. • Par hypothèse, $u_0 \in \left]0, A\right[$ et pour tout $x \in \left]0, A\right[$, $0 < f(x) < x$. On montre alors facilement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et appartient à $\left]0, A\right[$.

• Ainsi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie, et à valeurs dans $\left]0, A\right[$. Elle est donc minorée, et de plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n) < u_n$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante. Le théorème de la limite monotone assure alors qu'elle est bornée, notons ℓ sa limite $\ell \in \left[0, A\right[$ et comme f est continue, ℓ est un point fixe de f. Or pour tout $x \in \left]0, A\right[$, $0 < f(x) < x$. On a donc $\ell = 0$.

2. • On a : $v_n = (f(u_n))^{\beta} - u_n^{\beta}$, et, comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, on peut utiliser le

développement

limité : $f(x) \underset{0}{=} x - a x^k + o\left(x^k\right)$. On obtient

$$\begin{aligned} v_n &= \left(u_n - a u_n^k + o(u_n)^k\right)^{\beta} - u_n^{\beta} \\ &= u_n^{\beta}\left[\left(1 - a u_n^{k-1} + o(u_n)^{k-1}\right)^{\beta} - 1\right] \\ &= u_n^{\beta}\left[\left(1 - a\beta u_n^{k-1} + o(u_n)^{k-1}\right) - 1\right] \\ &= -a\beta u_n^{\beta+k-1} + o(u_n)^{\beta+k-1}. \end{aligned}$$

On en déduit que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite finie et non nulle si et seulement si $\beta + k - 1 = 0$, ie si et seulement si $\beta = 1 - k$. Dans ce cas, cette limite est égale à $-a\beta = a(k-1)$.

• Le lemme de Cesàro (hors programme, mais que l'on peut utiliser ici puisque l'énoncé l'autorise), assure alors que l'on a également $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} v_k = a(k-1)$. Or $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} v_k = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(u_{k+1}^{\beta} - u_k^{\beta}\right)$, et par télescopage $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} v_k = \frac{1}{n}\left(u_n^{\beta} - u_0^{\beta}\right)$.

Ainsi $\frac{1}{n}\left(u_n^{\beta} - u_0^{\beta}\right) \sim a(k-1)$; $\lim \frac{1}{n} u_0^{\beta} = 0$, donc on a également $\frac{1}{n} u_n^{\beta} \sim a(k-1)$, d'où

$u_n \sim (a(k-1))^{\frac{1}{\beta}} n^{\frac{1}{\beta}} = ((k-1)an)^{\frac{1}{1-k}}$.

3. L'application $x \mapsto \sin(x)$ est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\sin x \underset{0}{=} x - \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right)$ et pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$0 < \sin x < x$. $u_0 = 1$ appartient à $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. On peut donc appliquer ce qui précède (avec $a = \frac{1}{6}$ et $k = 3$), et l'on obtient $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$.

Exercice 5

1. On a $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, où f est la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t}$. f est continue sur le segment $[0, 1]$, le résultat du cours concernant les sommes de Riemann s'applique donc, et assure que $\lim a_n = \int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t$, soit

$\lim a_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 2$.

2. Procédons par récurrence. On a $a_1 = \frac{1}{2}$ et $S_2 = \sum_{k=1}^{2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$, donc la propriété est vraie au rang 1.

Si on la suppose vraie à un rang $n \in \mathbb{N}^*$: d'une part :

$$a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} = \sum_{j=2}^{n+2} \frac{1}{n+j} = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} + \sum_{j=1}^{n+2} \frac{1}{n+j},$$

ce qui donne $a_{n+1} = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} + a_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} + a_n$. D'autre part :

$$S_{2(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}.$$

Comme par hypothèse de récurrence $S_{2n} = a_n$, on en conclut que $S_{2(n+1)} = a_{n+1}$, et ceci achève la récurrence.

3. D'après **2.** et **1.**, on a $\lim S_{2n} = \lim a_n = \ln 2$. Il est alors clair qu'également $\lim S_{2n+1} = \ln 2$, puisque $S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$. Les suites des termes d'indices pairs et impairs de la suite (S_n) convergeant vers une même limite, (S_n) converge elle aussi vers cette limite. Cela revient à dire que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge, et que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$.

Exercice 6

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $V_n = S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} u_k$, et $W_n = S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} u_k$.

Montrons que les suites $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$V_{n+1} - V_n = \sum_{k=0}^{2n+2} u_k - \sum_{k=0}^{2n} u_k = u_{2n+2} + u_{2n+1} = (-1)^{2n+2}|u_{2n+2}| + (-1)^{2n+1}|u_{2n+1}|$$
$$= |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}|,$$

et la décroissance de la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ assure alors que $V_{n+1} - V_n \leq 0$: la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

•• De manière analogue, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$W_{n+1} - W_n = \sum_{k=0}^{2n+3} u_k - \sum_{k=0}^{2n+1} u_k = u_{2n+3} + u_{2n+2}$$
$$= (-1)^{2n+3}\left|u_{2n+3}\right| + (-1)^{2n+2}\left|u_{2n+2}\right| = -\left|u_{2n+3}\right| + \left|u_{2n+2}\right| ,$$

et, par décroissance de $\left(\left|u_n\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$, il en résulte que $W_{n+1} - W_n \geq 0$, et ainsi $\left(W_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

••• $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $W_n - V_n = \sum_{k=0}^{2n+1} u_k - \sum_{k=0}^{2n} u_k = u_{2n+1}$. Or par hypothèse, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

On a donc également $\lim_{n\to+\infty}\left(W_n - V_n\right) = 0$.

Ceci achève de prouver que les suites $\left(V_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(W_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Ces deux suites convergent donc vers la même limite, et ce sont par ailleurs les suites extraites des termes d'ordre respectivement pair et impair de $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$; cette suite converge donc elle aussi vers cette limite commune, et la convergence de la suite des sommes partielles $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ équivaut à celle de la série $\sum u_n$.

2. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

- $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n \left|u_n\right|$;
- La suite $\left(\left|u_n\right|\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ est évident.

D'après **1.**, la série $\sum u_n = \sum_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ est donc convergente, et on en conclut après un petit changement d'indice

que $\boxed{\text{la série harmonique alternée } \sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} \text{ converge}}$.

Exercice 7

1. On utilise le théorème spécial des séries alternées (point **3.** rappelé en préambule de cette section) :

la suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\right)_{n\geq 1}$ est décroissante et tend vers 0, donc $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$ converge.

2. $\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} + O\left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)^2 = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, donc :

- Par comparaison à une série de Riemann, $\sum\left(\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right) - \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$ converge (absolument).

•• D'après **2.**, $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$ converge. On en déduit que $\sum \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$ converge.