Séances de prérentrée

3 – Etudes de suites

Exercice 1

Théorème spécial des séries alternées

1. Soit $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ une série numérique réelle. On suppose que :

- • $\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ u_n > 0$.
- •• La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- ••• $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0 = 0$.

Montrer que la série $\sum (-1)^n u_n$ converge.

2. Déterminer la nature de la série harmonique alternée $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Exercice 2

Intégrales de Wallis

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \,\mathrm{d}t$.

1. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.

2. Calculer I_0 et I_1 . En déduire la valeur de I_n pour tout entier naturel n .

3. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire que $I_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} I_n$.

4. Pour tout entier naturel n , on pose $w_n = (n+1)\, I_{n+1}\, I_n$. Montrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

5. Déduire des deux questions précédentes que $I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Exercice 3

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note f_n l'application définie par : $\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ f_n(x) = \mathrm{e}^{nx} + x - 2$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel en lequel f_n s'annule. On notera désormais u_n ce réel.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi définie est décroissante.

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et admet pour limite 0 .

4. a. En remarquant que $n\, u_n = \ln(2 - u_n)$, montrer que $u_n \sim \dfrac{\ln(2)}{n}$;

b. en déduire que $u_n \underset{n \to +\infty}{=} \dfrac{\ln(2)}{n} - \dfrac{\ln(2)}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$;

c. prouver enfin l'existence d'un réel a, que l'on déterminera, tel que : $u_n \underset{n \to +\infty}{=} \dfrac{\ln(2)}{n} - \dfrac{\ln(2)}{2n^2} + \dfrac{a}{n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

Exercice 4

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{nk^2}{(an^2+k^2)(bn^2+k^2)}$, où a, b sont deux réels strictement positifs et distincts.

Exercice 5

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$. Montrer que $x_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2n}$.

Exercice 6

Etudier les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $u_0 \in \mathbb{R}$, et par la relation de récurrence : $\forall\ n \geq 0,\ u_{n+1} = \sin\left(\cos^2 u_n\right)$.

Exercice 7

Etudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = a > 0$, $u_1 = b > 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1} u_n}$.

Exercice 8

Etudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour $x \geq -1$ par $\begin{cases} u_0 = x \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$.

Exercice 9

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 = 1$, et, Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_0 \times x_1 \times \cdots \times x_n + 2$.

Déterminer un équivalent de x_n.