Séance de prérentrée 3

Corrigés

Exercice 1

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $V_n = S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} u_k$, et $W_n = S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} u_k$.

Montrons que les suites $\left(V_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(W_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} V_{n+1} - V_n &= \sum_{k=0}^{2n+2} u_k - \sum_{k=0}^{2n} u_k = u_{2n+2} + u_{2n+1} \\ &= (-1)^{2n+2}\left|u_{2n+2}\right| + (-1)^{2n+1}\left|u_{2n+1}\right| \\ &= \left|u_{2n+2}\right| - \left|u_{2n+1}\right|, \end{aligned}$$

et la décroissance de la suite $\left(\left|u_n\right|\right)_{n \in \mathbb{N}}$ assure alors que $V_{n+1} - V_n \leq 0$: la suite $\left(V_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

- • De manière analogue, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} W_{n+1} - W_n &= \sum_{k=0}^{2n+3} u_k - \sum_{k=0}^{2n+1} u_k = u_{2n+3} + u_{2n+2} \\ &= (-1)^{2n+3}\left|u_{2n+3}\right| + (-1)^{2n+2}\left|u_{2n+2}\right| = -\left|u_{2n+3}\right| + \left|u_{2n+2}\right|, \end{aligned}$$

et, par décroissance de $\left(\left|u_n\right|\right)_{n \in \mathbb{N}}$, il en résulte que $W_{n+1} - W_n \geq 0$, et ainsi $\left(W_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

- • • $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_n - V_n = \sum_{k=0}^{2n+1} u_k - \sum_{k=0}^{2n} u_k = u_{2n+1}$. Or par hypothèse, $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

On a donc également $\lim_{n \to +\infty} \left(W_n - V_n\right) = 0$.

Ceci achève de prouver que les suites $\left(V_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(W_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. Ces deux suites convergent donc vers la même limite, et ce sont par ailleurs les suites extraites des termes d'ordre respectivement pair et impair de $\left(S_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$; cette suite converge donc elle aussi vers cette limite commune, et la convergence de la suite des sommes partielles $\left(S_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ équivaut à celle de la série $\sum u_n$.

2. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n \left|u_n\right|$;

- La suite $\left(| u_n | \right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\dfrac{1}{n+1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ est évident.

D'après **1.**, la série $\sum u_n = \sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ est donc convergente, et on en conclut après un petit changement d'indice que $\boxed{\text{la série harmonique alternée } \sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} \text{ converge}}$.

Exercice 2

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n+1} \sin t \, dt$. Les fonctions $u : t \mapsto (\sin t)^{n+1}$, $v : t \mapsto -\cos t$ sont de classe C^1 ; on a : $\forall t$, $u'(t) = (n+1)(\sin t)^n \cos t$, $v'(t) = \sin t$;

$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(t) v'(t) \, dt$, l'intégration par parties est donc licite, et donne

$$
\begin{aligned}
I_{n+2} &= \left[u(t) v(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(t) v'(t) \, dt \\
&= \left[-(\sin t)^{n+1} \cos t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n (\sin t)^2 \, dt \\
&= 0 + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \left(1 - \sin^2 t \right) dt \\
&= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \, dt - (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n+2} \, dt \\
&= (n+1) I_n - (n+1) I_{n+2}.
\end{aligned}
$$

On a donc $(n+2) I_{n+2} = (n+1) I_n$, d'où $\boxed{I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n}$.

2. • On a $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \dfrac{\pi}{2}$, et $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt = \left[-\cos t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

•• On en déduit la valeur des intégrales I_n, en distinguant les cas n pair et n impair :

◦ D'après **1.**, pour tout n :

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{2} I_0 \\
I_4 &= \frac{3}{4} I_2 \\
I_6 &= \frac{5}{6} I_4 \\
&\vdots \\
I_{2k} &= \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2} \\
&\vdots \\
I_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2}
\end{aligned}
$$

.

En multipliant membre à membre ces égalités, il vient :

$$I_{2n} = \frac{1.3.5.\dots.(2n-1)}{2.4.6.\dots.(2n)} I_0 = \frac{1.3.5.\dots.(2n-1)}{2.4.6.\dots.(2n)} \frac{\pi}{2} .$$

On pourrait en rester là, toutefois la méthode de transformation de cette expression est tout à fait classique :
On intercale au numérateur les termes d'indice pair, en les ajoutant bien sûr en même temps au dénominateur, on obtient

$$I_{2n} = \frac{1.2.3.4.5.\dots.(2n-1).(2n)}{\left(2.4.6.\dots.(2n)\right)^2} \frac{\pi}{2} .$$

On en déduit que $I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{\left(2.4.6.\dots.(2n)\right)^2} \dfrac{\pi}{2}$, puis :

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{\left((2.1).(2.2).(2.3).\dots.(2.n)\right)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{\left(2^n.(1.2.3.\dots.n)\right)^2} \frac{\pi}{2},$$

et finalement $\boxed{I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \dfrac{\pi}{2} = 2^{-2n} \dbinom{2n}{n} . \dfrac{\pi}{2}}$.

◦ ◦ Les mêmes techniques permettent d'établir, à partir des égalités

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{2}{3} I_1 \\
I_5 &= \frac{3}{4} I_3 \\
I_7 &= \frac{5}{6} I_5 \\
&\vdots \\
I_{2k+1} &= \frac{2k}{2k+1} I_{2k-1} \\
&\vdots \\
I_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1},
\end{aligned}$$

que $I_{2n+1} = \dfrac{2.4.6.\dots.2n}{3.5.7.\dots.(2n+1)} .1$, puis que $\boxed{I_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}}{(2n+1)\dbinom{2n}{n}}}$.

3. • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \sin t \, dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \, dt = I_n$: $\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$.

• • On déduit de ceci que $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$, soit d'après **1.**, $\dfrac{n+1}{n+2} I_n \leq I_{n+1} \leq I_n$.

Comme $\dfrac{n+1}{n+2} \underset{n \to +\infty}{\sim} 1$, on en déduit, par encadrement, que $\boxed{I_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} I_n}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = (n+2) I_{n+2} I_{n+1} = (\cancel{n+2}) \dfrac{n+1}{\cancel{n+2}} I_n I_{n+1} = w_n$,

donc $\boxed{\text{la suite } (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est constante}}$.

5. On déduit du résultat de la question **4.** que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0$, soit $(n+1)\, I_{n+1}\, I_n = I_1\, I_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Comme $n+1 \underset{n \to +\infty}{\sim} n$ et $I_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} I_n$, on en tire $n \,.\, I_n^2 \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$. Il ne reste plus qu'à passer à la racine carrée (I_n est clairement positive), pour obtenir $\boxed{I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}}$.

Exercice 3

1. La fonction f_n est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim\limits_{-\infty} f_n = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f_n = +\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires strict, il existe donc un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.

De plus, puisque $f_n(0) < 0$, la croissance de f_n assure que $u_n > 0$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(u_{n+1}) - f_{n+1}(u_{n+1}) = \mathrm{e}^{n u_{n+1}} - \mathrm{e}^{(n+1) u_{n+1}}$ est strictement négatif, car $u_{n+1} > 0$.

Mais $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$; on a donc $f_n(u_{n+1}) < 0$, soit $f_n(u_{n+1}) < f_n(u_n)$, et, par croissance de f_n, on en déduit que $u_{n+1} < u_n$: la suite (u_n) est (strictement) décroissante.

3. On a montré que (u_n) est décroissante, à valeurs positives, elle est donc convergente. Notons ℓ sa limite. Si l'on suppose $\ell > 0$, on obtient par passage à la limite dans l'égalité $\mathrm{e}^{n u_n} + u_n - 2 = 0$ une contradiction immédiate. Par conséquent, (u_n) converge vers 0.

4. L'égalité $\mathrm{e}^{n u_n} + u_n - 2 = 0$ donne bien $n\, u_n = \ln(2 - u_n)$ $\quad(\mathbf{1})$.

4.a. Comme $\lim u_n = 0$, on en tire : $n\, u_n = \ln(2 + \circ(1))$, d'où $u_n \sim \dfrac{\ln 2}{n}$.

4.b. On sait maintenant que $u_n = \dfrac{\ln 2}{n} + \dfrac{v_n}{n}$, avec $\lim v_n = 0$. En remplaçant dans $(\mathbf{1})$, il vient :

$\ln 2 + v_n = \ln\left(2 - \dfrac{\ln 2}{n} + \circ\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = \ln\left(2\left(1 - \dfrac{\ln 2}{2n} + \circ\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\right)$, d'où

$\ln 2 + v_n = \ln 2 + \ln\left(1 - \dfrac{\ln 2}{2n} + \circ\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = \ln 2 - \dfrac{\ln 2}{2n} + \circ\left(\dfrac{1}{n}\right)$, et $v_n = -\dfrac{\ln 2}{2n} + \circ\left(\dfrac{1}{n}\right)$. On a donc bien $u_n = \dfrac{\ln(2)}{n} - \dfrac{\ln(2)}{2n^2} + \circ\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

4.c. On recommence : $u_n = \dfrac{\ln(2)}{n} - \dfrac{\ln(2)}{2n^2} + \dfrac{w_n}{n^2}$, avec $\lim v_n = 0$, et l'on remplace dans $(\mathbf{1})$, ce qui donne :

$$\ln 2 - \frac{\ln 2}{n} + \frac{w_n}{n} = \ln\left(2\left(1 - \frac{\ln 2}{2n} + \frac{\ln 2}{2n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right).$$

Il en résulte que

$$-\frac{\ln 2}{n} + \frac{w_n}{n} = \ln\left(1 - \frac{\ln 2}{2n} + \frac{\ln 2}{2n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \left(-\frac{\ln 2}{2n} + \frac{\ln 2}{2n^2}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{\ln 2}{2n}\right)^2 + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

puis en simplifiant, $w_n = \dfrac{4\ln 2 - \ln^2 2}{8n}$, et ainsi $u_n = \dfrac{\ln(2)}{n} - \dfrac{\ln(2)}{2n^2} + \dfrac{4\ln 2 - \ln^2 2}{8n^3} + \circ\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

Exercice 4

On est censé reconnaître une somme de Riemann, en transformant un peu. On a :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n k^2}{\left(an^2 + k^2\right)\left(bn^2 + k^2\right)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n\left(\left(\frac{k}{n}\right)^2 n^2\right)}{\left(an^2 + \left(\left(\frac{k}{n}\right)^2 n^2\right)\right)\left(bn^2 + \left(\left(\frac{k}{n}\right)^2 n^2\right)\right)}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{\left(a + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\left(b + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)} = = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

où f est la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{\left(a + x^2\right)\left(b + x^2\right)}$. On reconnaît donc bien une somme de Riemann. Comme f est continue sur $[0, 1]$, le cours assure que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{n k^2}{\left(an^2 + k^2\right)\left(bn^2 + k^2\right)} = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^2}{\left(a + t^2\right)\left(b + t^2\right)}\,\mathrm{d}t$.

Il ne reste plus qu'à calculer cette intégrale. Pour cela, on utilise une décomposition en éléments simples de $\frac{X}{(a + X)(b + X)}$: on trouve $\frac{X}{(a + X)(b + X)} = \frac{a}{a - b}\frac{1}{a + X} + \frac{b}{b - a}\frac{1}{b + X}$; on en déduit que

$$\int_0^1 \frac{t^2}{\left(a + t^2\right)\left(b + t^2\right)}\,\mathrm{d}t = \frac{a}{a - b}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{a + t^2} - \frac{b}{b - a}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{b + t^2}$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{a - b}\left[\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{a}}\right)\right]_0^1 - \frac{\sqrt{b}}{b - a}\left[\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{b}}\right)\right]_0^1$$

$$= \boxed{\frac{1}{a - b}\left(\sqrt{a}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) - \sqrt{b}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)\right)}.$$

Exercice 5

Sol 1.

Remarquons tout d'abord que $\left(x_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et divergente, car une limite éventuelle vérifierait $\ell = \ell + \frac{1}{\ell}$, ce qui est impossible. On en déduit que $x_n \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty$.

On a alors : $x_{n+1}^{\;2} - x_n^{\;2} = x_n^{\;2}\left(\left(1 + \frac{1}{x_n^{\;2}}\right)^2 - 1\right) \underset{n \to +\infty}{=} x_n^{\;2}\left(1 + \frac{2}{x_n^{\;2}} + o\left(\frac{1}{x_n^{\;2}}\right) - 1\right) = 2 + o(1)$.

On en déduit avec le théorème de Cesaro : $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1}^{\;2} - x_k^{\;2} \underset{n\to+\infty}{\to} 2$, c'est-à-dire $x_n^{\;2} - x_0^{\;2} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n$.

Et donc $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n}$.

Sol 2.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = x_n^{\;2}$. Alors la suite $\left(v_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie : (1): $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n + \frac{1}{v_n} + 2$.

On en déduit dans un premier temps que pour tout $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} \geq v_n + 2$, d'où par une récurrence immédiate, $v_n \geq v_0 + 2n$.

L'égalité (1) permet ensuite d'en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} \leq v_n + 2 + \frac{1}{v_0 + 2n} \leq v_n + 2 + \frac{1}{2n}$, puis que pour tout $n \geq 2$: $v_n \leq v_1 + 2(n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2n}$. Par comparaison somme/intégrale, il vient

$$v_n \leq v_1 + 2(n-1) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_1^{n-2} \frac{dt}{t} = v_1 + 2n - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln(n-2).$$

Finalement, pour tout $n \geq 2$, $2n \leq v_n \leq v_1 + 2n + \frac{1}{2}\ln n$, d'où

$$\sqrt{2n} \leq u_n \leq \sqrt{u_1^2 + 2n + \frac{1}{2}\ln n} = \sqrt{2n}\sqrt{1 + O\left(\frac{\ln n}{n}\right)}.$$

Comme $\sqrt{2n}\sqrt{1 + O\left(\frac{\ln n}{n}\right)} = \sqrt{2n} + O\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)$, on a bien $x_n \sim \sqrt{2n}$, et plus précisément

$$x_n = \sqrt{2n} + O\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right).$$

Exercice 6

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est du type $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction $f : x \mapsto \sin\left(\cos^2 x\right)$.

Détermination d'un intervalle f – stable adapté

$f(\mathbb{R}) = \sin([0,1]) \subset \sin\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [0,1]$, donc (u_n) est à valeurs dans $[0,1]$ à partir du rang 1, et $[0,1]$ est f – stable.

Variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

La fonction f est dérivable, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -2\cos(x)\sin(x)\cos\left(\cos^2 x\right) = -\sin(2x)\cos\left(\cos^2 x\right).$$

Alors pour tout $x \in [0,1]$, $f'(x) \leq -0$: il en résulte que $(u_n)_{n \geq 1}$ n'est ni croissante ni décroissante (sauf si elle est constante), mais que ses suites extraites des termes d'indices pair et impairs sont monotones, de monotonies contraires.

Recherche des points fixes

$\varphi(x) = f(x) - x$; $\varphi'(x) = -1 - 2\cos(x)\sin(x)\cos\left(\cos^2 x\right) \leq 0$, et $\varphi'(x)$ ne s'annule qu'en des points isolés, la fonction φ est donc strictement décroissante ; elle est de plus continue, et $\varphi(0) = \sin(1) > 0$, $\varphi(0) = \sin\left(\cos^2 1\right) - 1 < 0$; d'après le théorème des valeurs intermédiaires strict, il existe un unique réel $\alpha \in [0,1]$ tel que $\varphi(\alpha) = \alpha$, et α est donc l'unique point fixe de f dans $[0,1]$.

Comme f est continue, α est l'unique limite finie possible de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|u_{n+1} - \alpha\right| = \left|f\left(u_n\right) - f\left(\alpha\right)\right|$. Comme f est de classe C^1 sur $\left[0,1\right]$, avec

$\max\limits_{[0,1]} |f'| = \max\limits_{[0,1]} \left|\sin\left(2x\right)\cos\left(\cos^2 x\right)\right| = \sin\left(2\right).\cos\left(\cos^2\left(1\right)\right) = M < 1$, l'inégalité des accroissements finis donne $\left|u_{n+1} - \alpha\right| \le M\left|u_n - \alpha\right|$.

On en déduit, par une récurrence stupide, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|u_n - \alpha\right| \le M^{n-1}\left|u_1 - \alpha\right|$.

Il en résulte que $\boxed{\text{la suite } \left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \alpha}$.

Exercice 7

Idée 1

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = \min\left(u_n, u_{n+1}\right)$ et $\beta_n = \max\left(u_n, u_{n+1}\right)$. Montrer que les suites $\left(\alpha_n\right)$ et $\left(\beta_n\right)$ sont adjacentes est facile (dans le détail, prouver d'abord que $\left(\alpha_n\right)$ est croissante et $\left(\beta_n\right)$ décroissante ; comme $\alpha_0 \le \beta_n$ et $\alpha_n \le \beta_0$ est assez évident, cela prouve qu'elles sont monotones et bornées, donc convergentes ; en notant ℓ et ℓ' leurs limites respectives, prouver ensuite que $\ell = \ell'$).

Evidemment, cela ne donne pas la valeur de cette limite commune.

Idée 2

Il est clair que $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs strictement positives, on peut donc poser pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln\left(u_n\right)$.

Alors, la suite $\left(v_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = \frac{1}{2}\left(u_{n+1} + u_n\right).$$

On en déduit qu'il existe deux réels λ, μ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \lambda + \mu\left(-\frac{1}{2}\right)^n$. En posant $\gamma = \mathrm{e}^{\lambda}$ et $\delta = \mathrm{e}^{\mu}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \gamma\,\delta^{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$. Les conditions initiales donnent $\gamma\delta = a$ et $\dfrac{\gamma}{\sqrt{\delta}} = b$; on en déduit que $\gamma = \sqrt[3]{a b^2}$ et $\gamma = \sqrt[3]{\dfrac{a^2}{b^2}}$.

Ainsi :

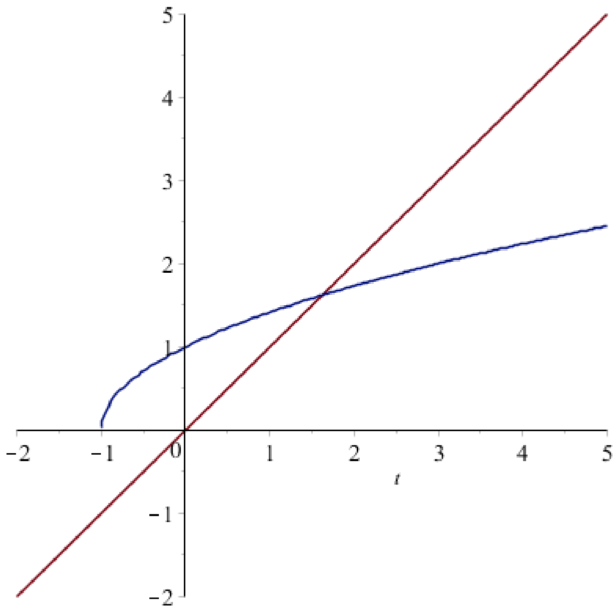
$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt[3]{a b^2}.\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}}, \text{ et } \boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \sqrt[3]{a b^2}}.$$

Exercice 8

On note $f : \begin{pmatrix} [-1, +\infty[& \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto \sqrt{1+t} \end{pmatrix}$.

La suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc la suite récurrente définie par $\begin{cases} u_0 = x \\ \forall\ n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f\left(x\right) \end{cases}$; comme $f\left(\left[-1, +\infty\right[\right) \subset \left[-1, +\infty\right[$, u_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$. Enfin f est continue, donc si $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$

converge, sa limite est point fixe de f. Le seul point fixe de f est $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, et on remarque que si $t < \ell$, alors $t < f(t) < \ell$, et si $t > \ell$, alors $\ell < f(t) < t$



On en déduit facilement :

(i) si $1 \leq x < \ell$, la suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par ℓ, elle converge vers ℓ.

(ii) si $x = \ell$, la suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante elle converge vers ℓ.

(iii) si $x > \ell$, la suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par ℓ, elle converge vers ℓ.

Exercice 9

On a pour tout $n \geq 1$:

$x_{n+1} = x_0 \times x_1 \times \cdots \times x_n + 2 = \left(x_0 \times x_1 \times \cdots \times x_{n-1} + 2\right) \times x_n + 2 = \left(x_n - 2\right) \times x_n + 2$.

C'est-à-dire : $x_{n+1} - 1 = \left(x_n - 1\right)^2$.

On en déduit pour tout $n \geq 1$: $x_n - 1 = \left(x_1 - 1\right)^{2^{n-1}} = 2^{2^{n-1}}$, et donc $x_n = 2^{2^{n-1}} + 1$.

D'où $x_n \underset{n \to +\infty}{\sim} 2^{2^{n-1}}$.