Séance de prérentrée 1

Corrigés (sauf l'exercice 5)

Exercice 1

1. On a

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{0}{=} \left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^5\right)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^5\right)\right) \\ &\underset{0}{=} \left(1+\frac{x^4}{24}\right)^2-\left(\frac{x^2}{2}\right)^2+o\left(x^5\right) \\ &\underset{0}{=} \boxed{1-\frac{x^4}{6}+o\left(x^5\right)}. \end{aligned}$$

2. ***Solution 1***

On commence par se ramener au voisinage de 0, puis on met en facteur le terme dominant :

$$g(3+t)=\sqrt{4+t}=2\sqrt{1+\frac{t}{4}}=2\left(1+\frac{t}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

On peut dès lors utiliser le développement limité au voisinage de 0 de la fonction $u \mapsto (1+u)^{\frac{1}{2}}$; il vient

$$\begin{aligned} g(3+t) &\underset{t\to 0}{=} 2\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{t}{4}\right)+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\left(\frac{t}{4}\right)^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}\left(\frac{t}{4}\right)^3+o\left(t^3\right)\right] \\ &\underset{t\to 0}{=} 2+\frac{t}{4}-\frac{t^2}{64}+\frac{t^3}{512}+o\left(t^3\right), \end{aligned}$$

d'où : $\boxed{g(x)\underset{x\to 3}{=}1+\frac{(x-3)}{4}-\frac{(x-3)^2}{64}+\frac{(x-3)^3}{512}+o(x-3)^3}$.

Solution 2

Les dérivées successives de la fonction g sont simples et on demande un DL à un petit ordre, pour une fois il est envisageable d'utiliser la formule de Taylor – Young :

g est bien de classe C^3 sur $]-1,+\infty[$; pour x dans ce domaine :

$$g(x)=\sqrt{1+x},\quad g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}},\quad g''(x)=\frac{-1}{4\sqrt{1+x}^3},\quad g^{(3)}(x)=\frac{3}{8\sqrt{1+x}^5}.$$

La formule de Taylor – Young donne :

$$g(x)\underset{x\to 3}{=}g(3)+\frac{g'(3)}{1!}(x-3)+\frac{g''(3)}{2!}(x-3)^2+\frac{g^{(3)}(3)}{3!}(x-3)^3+o(x-3)^3,$$

et l'on retrouve $\boxed{g(x)\underset{x\to 3}{=}2+\frac{1}{4}(x-3)-\frac{1}{64}(x-3)^2+\frac{1}{512}(x-3)^3+o(x-3)^3}$.

3. • Commençons par déterminer le développement limité au voisinage de 0 de la fonction tangente : on a

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \underset{0}{=} \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)}$$

$$\underset{0}{=} \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)}{1 - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)\right)}$$

$$\underset{0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)\right)\left(1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^2 + o\left(x^4\right)\right)$$

$$\underset{0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o\left(x^4\right)\right)$$

$$\underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o\left(x^5\right) .$$

• On en déduit le développement limité demandé :

$$h(x) \underset{0}{=} \exp\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o\left(x^5\right)\right)$$

$$\underset{0}{=} 1 + \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}\right) + \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^3}{3}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x + \frac{x^3}{3}\right)^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + o\left(x^5\right)$$

$$\underset{0}{=} \boxed{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{3x^4}{8} + \frac{37x^5}{120} + o\left(x^5\right)} .$$

Exercice 2

1. $w_n = \left(\dfrac{e^{\frac{\ln 3}{n}} + e^{\frac{\ln 4}{n}}}{2}\right)^n = \left(\dfrac{1 + \frac{\ln 3}{n} + 1 + \frac{\ln 4}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{2}\right)^n = \left(1 + \dfrac{\ln 12}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^n$, puis l'on passe sous forme exponentielle : $w_n = \exp\left(n \ln\left(1 + \dfrac{\ln 12}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp\left(\dfrac{1}{2}\ln 12 + \circ(1)\right)$, d'où $\boxed{w_n \sim \exp\left(\dfrac{\ln 12}{2}\right) = \sqrt{12}}$.

2. On a

$$x_n = \left(n \sin\frac{1}{n}\right)^{n^2} - e^{-\frac{1}{6}} = e^{n^2 \ln\left(n \sin\frac{1}{n}\right)} - e^{-\frac{1}{6}} = e^{n^2 \ln\left(1 - \frac{1}{6n^2} + \frac{1}{120n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)} - e^{-\frac{1}{6}}$$

$$= e^{n^2\left(-\frac{1}{6n^2} + \frac{1}{120n^4} - \frac{1}{72n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)} - e^{-\frac{1}{6}}$$

$$= e^{-\frac{1}{6} - \frac{1}{180n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} - e^{-\frac{1}{6}} = e^{-\frac{1}{6}}\left(e^{-\frac{1}{180n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}\right) - e^{-\frac{1}{6}}$$

$$= e^{-\frac{1}{6}}\left(1 - \frac{1}{180n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - e^{-\frac{1}{6}} = -\frac{e^{-\frac{1}{6}}}{180n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) .$$

3. La formule de Taylor avec reste intégral, appliquée à l'ordre $n+1$ à la fonction exponentielle entre 0 et 1, est correcte, puisque $\exp$ est de classe C^{n+2} sur $[0, 1]$. Ladite formule de Taylor donne :

$$e = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t \, dt = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + u_n ,$$

avec $0 \leq u_n = \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t \, dt \leq e \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt = \frac{1}{(n+2)!}$, d'où $u_n = o\left(\frac{1}{(n+1)!}\right)$.

On en déduit que :

$$\begin{aligned} v_n &= n! \sin\left(\left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} + o\left(\frac{1}{(n+1)!}\right)\right)\pi\right) \\ &= n! \sin\left(\pi + \frac{1}{(n+1)!} + o\left(\frac{1}{(n+1)!}\right)\right) \\ &= -n! \sin\left(\frac{1}{(n+1)!} + o\left(\frac{1}{(n+1)!}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right), \end{aligned}$$

d'où $\boxed{v_n \sim -\frac{1}{n+1} \sim -\frac{1}{n}}$.

Exercice 3

1. Posons $u_n = \ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)$. On a

$$\begin{aligned} u_n &= \ln(n) + a \ln\left(n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) + b \ln\left(n\left(1 + \frac{2}{n}\right)\right) \\ &= (1 + a + b) \ln(n) + a \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + b \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) \\ &= (1 + a + b) \ln(n) + \frac{a + 2b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

et alors :

- Si $1 + a + b \neq 0$, $u_n \sim (1 + a + b) \ln(n)$ et donc ne tend pas vers 0 : la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Si $1 + a + b = 0$ et $a + 2b \neq 0$, $u_n \sim \frac{a + 2b}{n}$, et, par comparaison à une série de Riemann, $\sum u_n$ diverge encore.
- Si $1 + a + b = 0$ et $a + 2b = 0$, $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. A nouveau par comparaison à une série de Riemann, $\sum u_n$ converge.

Ainsi, $\sum u_n$ converge si et seulement si $\begin{cases} a + b = -1 \\ a + 2b = 0 \end{cases}$, soit si et seulement si $\boxed{\begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases}}$.

2. Maintenant, $\sum u_n$ est la série $\sum_{n \geq 1} \left(\ln(n) - 2 \ln(n+1) + \ln(n+2)\right)$, que l'on peut espérer fortement télescopique.

Pour tout $N \geq 1$:

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\ln(n)-2\ln(n+1)+\ln(n+2)\right)=\sum_{n=1}^{N}\ln(n)-2\sum_{n=1}^{N}\ln(n+1)+\sum_{n=1}^{N}\ln(n+2)$$
$$=\sum_{n=1}^{N}\ln(n)-2\sum_{n=2}^{N+1}\ln(n)+\sum_{n=3}^{N+2}\ln(n)$$
$$=-2\ln(N+1)+\ln(N+2)+\ln(N+1)-\ln 2$$
$$=-2\ln\left(\frac{N+2}{N+1}\right)-\ln 2\,.$$

Il en résulte que $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n=\lim_{N\to+\infty}\left(-2\ln\left(\frac{N+2}{N+1}\right)-\ln 2\right)=\boxed{-\ln 2}$.

Exercice 4

1. $\lim_{n\to+\infty}a_n=\lambda$ s'écrit :

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,N\in\mathbb{N},\ \forall\,n\in\mathbb{N},\ n\geq N\Rightarrow\left|a_n-\lambda\right|\leq\varepsilon\,.$$

2. D'après **1.**, on peut choisir $N_1\in\mathbb{N}$ tel que pour tout entier $k\geq N_1$, on ait $\left|a_k-\lambda\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}$.

Pour un tel entier $k\geq N_1$, et pour $n\geq N_1$, on a par inégalité triangulaire :

$$\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}a_k-\lambda\right|\leq\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left|a_k-\lambda\right|=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N_1-1}\left|a_k-\lambda\right|+\frac{1}{n+1}\sum_{k=N_1}^{n}\left|a_k-\lambda\right|.$$

Dans la somme $\sum_{k=N_1}^{n}\left|a_k-\lambda\right|$, tous les termes sont inférieurs ou égaux à $\frac{\varepsilon}{2}$, on a donc :

$$\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}a_k-\lambda\right|\leq\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N_1-1}\left|a_k-\lambda\right|+\frac{n-N_1+1}{n+1}\frac{\varepsilon}{2}\leq\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N_1-1}\left|a_k-\lambda\right|+\frac{\varepsilon}{2}.$$

3. La somme $\sum_{k=0}^{N_1-1}\left|a_k-\lambda\right|$ est indépendante de n, on a donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N_1-1}\left|a_k-\lambda\right|=0$. Par suite :

$$\exists\,N_2\in\mathbb{N},\ \forall\,n\geq N_2,\ \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N_1-1}\left|a_k-\lambda\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}.$$

Par suite, pour tout $\varepsilon>0$, avec les notations ci – dessus et en posant $N_3=\max\left(N_1,N_2\right)$:

$\forall\,n\in\mathbb{N},\ n\geq N_3\Rightarrow\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}a_k-\lambda\right|\leq\varepsilon$, soit $n\geq N_3\Rightarrow\left|b_n-\lambda\right|\leq\varepsilon$.

Ceci assure que $\boxed{\text{la suite } (b_n) \text{ converge vers } \lambda}$.

Exercice 6

1. • Par hypothèse, $u_0\in\left]0,A\right[$ et pour tout $x\in\left]0,A\right[$, $0<f(x)<x$. On montre alors facilement par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_n est bien défini et appartient à $\left]0,A\right[$.

• Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, et à valeurs dans $\left]0,A\right[$. Elle est donc minorée, et de plus pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)<u_n$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante. Le théorème de la limite monotone assure alors qu'elle est bornée, notons ℓ sa limite $\ell\in\left[0,A\right[$ et comme f est continue, ℓ est un point fixe de f. Or pour tout $x\in\left]0,A\right[$, $0<f(x)<x$. On a donc $\ell=0$.

2. • On a : $v_n = \left(f\left(u_n\right)\right)^{\beta} - u_n^{\beta}$, et, comme $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, on peut utiliser le développement limité : $f(x) \underset{0}{=} x - a x^k + o\left(x^k\right)$. On obtient

$$\begin{aligned} v_n &= \left(u_n - a u_n^k + o\left(u_n\right)^k\right)^{\beta} - u_n^{\beta} \\ &= u_n^{\beta}\left[\left(1 - a u_n^{k-1} + o\left(u_n\right)^{k-1}\right)^{\beta} - 1\right] \\ &= u_n^{\beta}\left[\left(1 - a\beta u_n^{k-1} + o\left(u_n\right)^{k-1}\right) - 1\right] \\ &= -a\beta u_n^{\beta+k-1} + o\left(u_n\right)^{\beta+k-1}. \end{aligned}$$

On en déduit que $\left(v_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite finie et non nulle si et seulement si $\beta + k - 1 = 0$, ie si et seulement si $\beta = 1 - k$. Dans ce cas, cette limite est égale à $-a\beta = a(k-1)$.

• Le lemme de Cesàro (hors programme, mais que l'on peut utiliser ici puisque l'énoncé l'autorise), assure alors que l'on a également $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} v_k = a(k-1)$. Or $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} v_k = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(u_{k+1}^{\beta} - u_k^{\beta}\right)$, et par télescopage $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} v_k = \frac{1}{n}\left(u_n^{\beta} - u_0^{\beta}\right)$.

Ainsi $\frac{1}{n}\left(u_n^{\beta} - u_0^{\beta}\right) \sim a(k-1)$; $\lim \frac{1}{n} u_0^{\beta} = 0$, donc on a également $\frac{1}{n} u_n^{\beta} \sim a(k-1)$, d'où

$u_n \sim \left(a(k-1)\right)^{\frac{1}{\beta}} n^{\frac{1}{\beta}} = \left((k-1)an\right)^{\frac{1}{1-k}}$.

3. L'application $x \mapsto \sin(x)$ est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\sin x \underset{0}{=} x - \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right)$ et pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $0 < \sin x < x$. $u_0 = 1$ appartient à $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. On peut donc appliquer ce qui précède (avec $a = \frac{1}{6}$ et $k = 3$), et l'on obtient $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$.

Exercice 7

1. La fonction f_n est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim\limits_{-\infty} f_n = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f_n = +\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires strict, il existe donc un unique réel u_n tel que $f_n\left(u_n\right) = 0$.

De plus, puisque $f_n(0) < 0$, la croissance de f_n assure que $u_n > 0$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n\left(u_{n+1}\right) - f_{n+1}\left(u_{n+1}\right) = e^{n u_{n+1}} - e^{(n+1)u_{n+1}}$ est strictement négatif, car $u_{n+1} > 0$.

Mais $f_{n+1}\left(u_{n+1}\right) = 0$; on a donc $f_n\left(u_{n+1}\right) < 0$, soit $f_n\left(u_{n+1}\right) < f_n\left(u_n\right)$, et, par croissance de f_n, on en déduit que $u_{n+1} < u_n$: la suite $\left(u_n\right)$ est (strictement) décroissante.

3. On a montré que $\left(u_n\right)$ est décroissante, à valeurs positives, elle est donc convergente. Notons ℓ sa limite. Si l'on suppose $\ell > 0$, on obtient par passage à la limite dans l'égalité $e^{n u_n} + u_n - 2 = 0$ une contradiction immédiate. Par conséquent, $\left(u_n\right)$ converge vers 0.

4. L'égalité $e^{nu_n}+u_n-2=0$ donne bien $nu_n=\ln\left(2-u_n\right)$ $\qquad(\mathbf{1})$.

4.a. Comme $\lim u_n=0$, on en tire : $nu_n=\ln\left(2+o(1)\right)$, d'où $u_n\sim\dfrac{\ln 2}{n}$.

4.b. On sait maintenant que $u_n=\dfrac{\ln 2}{n}+\dfrac{v_n}{n}$, avec $\lim v_n=0$. En remplaçant dans $(\mathbf{1})$, il vient :

$\ln 2+v_n=\ln\left(2-\dfrac{\ln 2}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)=\ln\left(2\left(1-\dfrac{\ln 2}{2n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\right)$, d'où

$\ln 2+v_n=\ln 2+\ln\left(1-\dfrac{\ln 2}{2n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)=\ln 2-\dfrac{\ln 2}{2n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, et $v_n=-\dfrac{\ln 2}{2n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. On a donc bien

$u_n=\dfrac{\ln(2)}{n}-\dfrac{\ln(2)}{2n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

4.c. On recommence : $u_n=\dfrac{\ln(2)}{n}-\dfrac{\ln(2)}{2n^2}+\dfrac{w_n}{n^2}$, avec $\lim v_n=0$, et l'on remplace dans $(\mathbf{1})$, ce qui donne :

$$\ln 2-\frac{\ln 2}{n}+\frac{w_n}{n}=\ln\left(2\left(1-\frac{\ln 2}{2n}+\frac{\ln 2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right).$$

Il en résulte que $-\dfrac{\ln 2}{n}+\dfrac{w_n}{n}=\ln\left(1-\dfrac{\ln 2}{2n}+\dfrac{\ln 2}{2n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)=\left(-\dfrac{\ln 2}{2n}+\dfrac{\ln 2}{2n^2}\right)-\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{\ln 2}{2n}\right)^2+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,

puis en simplifiant, $w_n=\dfrac{4\ln 2-\ln^2 2}{8n}$, et ainsi $u_n=\dfrac{\ln(2)}{n}-\dfrac{\ln(2)}{2n^2}+\dfrac{4\ln 2-\ln^2 2}{8n^3}+o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

Exercice 8

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lambda$ s'écrit :

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,N\in\mathbb{N},\ \forall\,n\in\mathbb{N},\ n\geq N\Rightarrow\left|u_n-\lambda\right|\leq\varepsilon \qquad (*).$$

D'après $(*)$, on peut choisir $N_1\in\mathbb{N}$ tel que pour tout entier $k\geq N_1$, on ait $\left|a_k-\lambda\right|\leq\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Pour un tel entier $k\geq N_1$, et pour $n\geq N_1$, on a par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_k-\lambda\right|&=\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(u_k-\lambda\right)\right|\leq\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left|u_k-\lambda\right|\\&=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N_1-1}\binom{n}{k}\left|u_k-\lambda\right|+\frac{1}{2^n}\sum_{k=N_1}^{n}\binom{n}{k}\left|u_k-\lambda\right|\end{aligned}.$$

Dans la somme $\displaystyle\sum_{k=N_1}^{n}\binom{n}{k}\left|u_k-\lambda\right|$, tous les $\left|u_k-\lambda\right|$ sont inférieurs ou égaux à $\dfrac{\varepsilon}{2}$, on a donc :

$$\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=N_1}^{n}\binom{n}{k}\left(u_k-\lambda\right)\right|\leq\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N_1-1}\binom{n}{k}\left|u_k-\lambda\right|+\frac{\displaystyle\sum_{k=N_1}^{n}\binom{n}{k}}{2^n}\frac{\varepsilon}{2}\leq\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N_1-1}\binom{n}{k}\left|u_k-\lambda\right|+\frac{\varepsilon}{2}.$$

La somme $\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{N_1-1}\binom{n}{k}\left|u_k-\lambda\right|$ contient un nombre fixé de termes (nombre indépendant de n), qui tendent tous vers 0

quand n tend vers $+\infty$ (car $\dfrac{\binom{n}{k}}{2^n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{k!} \dfrac{n^k}{2^k}$ puis croissances comparées), on a donc

$\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{N_1 - 1} \binom{n}{k} \left| u_k - \lambda \right| = 0$. Par suite :

$$\exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_2,\ \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{N_1 - 1} \binom{n}{k} \left| u_k - \lambda \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par suite, pour tout $\varepsilon > 0$, avec les notations ci – dessus et en posant $N_3 = \max\left(N_1, N_2\right)$:

$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_3 \Rightarrow \left| \dfrac{1}{2^n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k - \lambda \right| \leq \varepsilon$, soit $n \geq N_3 \Rightarrow \left| b_n - \lambda \right| \leq \varepsilon$.

Ceci assure que $\boxed{\text{la suite } \left(b_n\right) \text{ converge vers } \lambda}$.