Séance de prérentrée N°4

Problème : séries factorielles, selon Centrale PC Maths1 2009

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Seuls les résultats ***encadrés*** *ou* ***soulignés*** *seront pris en considération.*

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Le problème porte sur l'étude de séries factorielles, séries de fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}.$$

Les parties **I.** et **II.** traitent d'un exemple. Les parties **III.** et **IV.**, indépendantes des deux premières, ont pour objet l'étude de propriétés de la somme d'une série factorielle convergente sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

Partie I. – Préliminaires

I.A. Pour tout entier naturel non nul p, on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u(n,p) = \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+p)}.$$

I.A.1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u(n,p)$ est convergente.

I.A.2. On pose : $\sigma(p) = \sum_{n=1}^{+\infty} u(n,p)$. Calculer $\sigma(1)$.

I.A.3. Pour $p \geq 2$, et pour n quelconque dans $\mathbb{N}^*$, exprimer $u(n,p-1) - u(n+1,p-1)$ en fonction de p et de $u(n,p)$.

I.A.4. En déduire la valeur de $\sigma(p)$ en fonction de p, pour $p \geq 2$.

I.B. Soient q un entier supérieur ou égal à 2, et N un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Donner une majoration du reste $R(N,q) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^q}$, en le comparant à une intégrale.

Partie II. – Un exemple d'accélération de la convergence

II.A.1. Prouver par récurrence l'existence de trois suites $(a_p)_{p\geq 2}$, $(b_p)_{p\geq 2}$, $(c_p)_{p\geq 2}$ d'entiers naturels, toutes trois définies à partir du rang 2 et telles que l'on ait, pour tout réel x strictement positif et pour tout entier $p \geq 2$:

$$\frac{1}{x^3} = \frac{b_p x + c_p}{x^3(x+1)(x+2)\cdots(x+p)} + \sum_{k=2}^{p} \frac{a_k}{x(x+1)\cdots(x+k)}.$$

II.A.2. Exprimer a_{p+1}, b_{p+1} et c_{p+1} à l'aide de p, b_p et c_p.

II.A.3. Montrer que : $\forall\ p \geq 2,\ b_p \geq c_p \geq 0$.

II.A.4. Calculer a_p, b_p, c_p pour $p = 2, 3, 4$.

II.B. On désire calculer une valeur décimale approchée de : $\varsigma(3) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$

avec une erreur inférieure ou égale à $\varepsilon = 10^{-5}$.

II.B.1. En utilisant **I.B.**, déterminer un entier naturel N suffisant pour que $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ soit inférieur ou égal à ε.

II.B.2. Donner un majorant simple de : $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1)\cdots(n+4)}$.

Montrer, à l'aide de tout ce qui précède, comment calculer une valeur approchée de $\varsigma(3)$ avec la même précision $\varepsilon = 10^{-5}$, et avec une valeur de N moins grande que celle trouvée à la question **II.B.1.**.

II.B.3. En utilisant ce qui précède, écrire une fonction en Python permettant de donner une valeur approchée à ε près de $\varsigma(3)$.

Partie III. – Séries factorielles

III.A. ***Sur la continuité d'une série de fonctions.***

Dans cette partie sous-partie **III.A.**, on considère des fonctions f_n, $n \in \mathbb{N}$, définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout $x \in I$, la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge absolument. On définit alors la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ par : $\forall\ x \in I\ ,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$,

et l'on se propose d'étudier, dans deux cas particuliers, la continuité de f.

III.A.1. Dans cette question, $I = [0, 1]$, et l'on pose :

$$\forall\ x \in [0,1], \begin{cases} f_0(x) = 1 \\ \forall\ n \geq 1\ ,\ f_n(x) = x^{n-1}(x-1) \end{cases} .$$

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ n'est pas continue sur I.

III.A.2. Dans cette question, $I =]\,0, +\infty\,[$, et l'on suppose que les fonctions $|f_n|$ sont toutes décroissantes sur I. On se propose de démontrer qu'alors la fonction f est continue sur I.

On considère un réel $a > 0$, et un réel $x_0 \in]\,a, +\infty\,[$.

III.A.2.a. Soient $\varepsilon > 0$ et $x \in]\,a, +\infty\,[$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x_0) - \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq 2 \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(a)| .$$

En déduire l'existence d'un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x_0) - \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

III.A.2.b. Montrer alors que la fonction f est continue en x_0, puis que f est continue sur I.

III.B.1. Pour tout entier naturel n et pour tout réel x strictement positif, on pose :

$$u_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)},\ v_n(x) = \frac{1}{(n+1)^x} \text{ et } w_n(x) = \frac{u_n(x)}{v_n(x)} .$$

Montrer pour tout $x > 0$, la série $\sum_{n \geq 1} \ln\left(\frac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)}\right)$ est convergente.

III.B.2. En déduire qu'il existe un réel $\ell(x)$ (dépendant de x et strictement positif) tel que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n(x)}{v_n(x)} = \ell(x) .$$

III.C. Soient $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de complexes et x un réel strictement positif.

Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} a_n u_n(x)$ est absolument convergente (en abrégé AC) si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} a_n v_n(x)$ est AC .

III.D. On désigne désormais par $\mathcal{A}$ l'ensemble des suites $\left(a_n\right)_{n \geq 0}$ indexées par $\mathbb{N}$ telles que la série $\sum_{n \geq 0} a_n u_n(x)$ soit AC pour tout réel x strictement positif.

Pour $a = \left(a_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ élément de $\mathcal{A}$, on note f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f_a : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n(x) .$$

III.D.1. Donner un exemple de suite $a = \left(a_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ appartenant à $\mathcal{A}$ et vérifiant :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ a_n \neq 0.$$

III.D.2. Donner un exemple de suite a n'appartenant pas à $\mathcal{A}$.

III.E.1. Montrer en utilisant **III.A.** que f_a est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

On montrerait de la même façon (*on ne demande pas de le faire*) que la fonction

$g_a : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \left|a_n\right| u_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On note alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$M_k = \max_{x \in [k, k+1]} g_a(x) .$$

III.E.2.

III.E.2.a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x+1) \leq \dfrac{x}{x+1} u_n(x)$.

III.E.2.b. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $M_k \leq \dfrac{2}{k+1} M_1$.

III.E.2.c. A l'aide de ce qui précède, montrer que la fonction f_a tend vers 0 en $+\infty$.

III.F. Soit a un élément de $\mathcal{A}$.

III.F.1. Montrer que, pour tout entier n, la fonction $x \mapsto u_n(x)$ est de classe C^1 sur l'intervalle $]0, +\infty[$, et que : $\forall\ x > 0,\ \left|u_n'(x)\right| \leq u_n(x)\left(\dfrac{1}{x} + \ln\left(1 + \dfrac{n}{x}\right)\right)$.

On pourra dériver la fonction $\ln\left(u_n\right)$.

III.F.2. En déduire que la fonction pour tout $x \in]0, +\infty[$, la série $\sum a_n u_n'(x)$ converge.

On admet que la fonction f_a est de classe C^1 sur l'intervalle $]0, +\infty[$, et que pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$f_a'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n'(x).$$

Partie IV – Représentation intégrale

IV.A.1. Soit n un entier naturel. On pose : $\forall\ k \in \{0, ..., n\}$, $P_k = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} (X + i)$.

Montrer que $(P_0, P_1, ..., P_n)$ est une base de l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n.

IV.A.2. En déduire qu'il existe des rationnels indépendants de x notés $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n$ tels que :

$$\forall\ x > 0,\ \frac{n!}{x(x+1)(x+2)...(x+n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{x+k}\ .$$

Exprimer α_k en fonction de k et de n.

IV.B. Montrer que pour tout $y \in [0, 1[$ la série $\sum_{n \geq 0} a_n y^n$ converge.

On note ϕ_a la fonction définie par : $\phi_a(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n$.

Etant donnée une fonction h continue sur $]0, 1]$ (mais non nécessairement continue ni même définie en 0), on pose lorsque cela est possible : $\int_0^1 h(y)\,\mathrm{d}y = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 h(y)\,\mathrm{d}y$.

IV.C.1. Pour tout $x > 0$ et k entier naturel, calculer l'intégrale :

$$\int_0^1 (1-y)^{x-1+k}\,\mathrm{d}y\ .$$

IV.C.2. Montrer que : $\forall\ x > 0,\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ \int_0^1 (1-y)^{x-1} y^n\,\mathrm{d}y = \frac{n!}{x(x+1)...(x+n)}$.

En déduire que pour tout élément a de $\mathcal{A}$, on a :

$$\forall\ x > 0,\ f_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^1 (1-y)^{x-1} y^n\,\mathrm{d}y\ .$$

On admet que l'on a aussi : $\forall\ x > 0,\ f_a(x) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (1-y)^{x-1} y^n\,\mathrm{d}y$

IV.D. Soit a un élément de $\mathcal{A}$. Montrer que la fonction $x \mapsto \int_0^1 (1-y)^{x-1} \phi_a(y)\,\mathrm{d}y$ est définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$, et égale à f_a .