Séance de prérentrée N°4

Corrigé

Problème : séries factorielles
D'après Centrale Maths I PC 2009

Partie I - Préliminaires

I.A -

I.A.1) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)} \leqslant \frac{1}{n(n+1)} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Puisque la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge, il en est de même de la série de terme général $u(n,p)$.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, \text{ la série de terme général } u(n,p),\ n \in \mathbb{N}^*, \text{ est convergente.}}$$

I.A.2)

$$\sigma(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right) = \lim_{N \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 1.$$

$$\boxed{\sigma(1) = 1.}$$

I.A.3) Soit $p \geqslant 2$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u(n,p-1) - u(n+1,p-1) = \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p-1)} - \frac{1}{(n+1)\dots(n+p)} = \frac{(n+p)-n}{n(n+1)\dots(n+p)} = pu(n,p).$$

I.A.4) En sommant ces égalités, on obtient $\sigma(p-1) - (\sigma(p-1) - u(1,p-1)) = p\sigma(p)$ et donc $\sigma(p) = \frac{u(1,p-1)}{p} = \frac{1}{p \times p!}$.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \sigma(p) = \frac{1}{p \times p!}.}$$

I.B - Soit $q \geqslant 2$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$,

$$R(N,q) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^q} \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^q}\,dt = \int_{n}^{+\infty} \frac{1}{t^q}\,dt = \frac{1}{(q-1)n^{q-1}}.$$

$$\boxed{\forall (N,q) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ 0 \leqslant R(N,q) \leqslant \frac{1}{(q-1)N^{q-1}}.}$$

Partie II - Un exemple d'accélération de la convergence

II.A -

II.A.1) Montrons par récurrence que $\forall p \geqslant 2$, il existe des entiers naturels $a_2,\dots, a_p$, $b_2,\dots, b_p$, $c_2,\dots, c_p$, tels que

$$\forall x > 0,\ \frac{1}{x^3} = \sum_{k=2}^{p} \frac{a_k}{x(x+1)\dots(x+k)} + \frac{b_p x + c_p}{x^3(x+1)(x+2)\dots(x+p)}.$$

• Pour $p = 2$ et $x > 0$

$$\frac{1}{x^3} = \frac{(x+1)(x+2)}{x^3(x+1)(x+2)} = \frac{x^2}{x^3(x+1)(x+2)} + \frac{3x+2}{x^3(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x(x+1)(x+2)} + \frac{3x+2}{x^3(x+1)(x+2)}$$

et on peut prendre $a_2 = 1$, $b_2 = 3$ et $c_2 = 2$.
• Soit $p \geqslant 2$. Supposons qu'il existe des entiers naturels $a_2, \ldots, a_p$, $b_2, \ldots, b_p$, $c_2, \ldots, c_p$, tels que

$$\forall x > 0,\ \frac{1}{x^3} = \sum_{k=2}^{p} \frac{a_k}{x(x+1)\ldots(x+k)} + \frac{b_p x + c_p}{x^3(x+1)(x+2)\ldots(x+p)}.$$

Alors, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{b_p x + c_p}{x^3(x+1)(x+2)\ldots(x+p)} &= \frac{(b_p x + c_p)(x+p+1)}{x^3(x+1)(x+2)\ldots(x+p)(x+p+1)} \\
&= \frac{b_p x^2}{x^3(x+1)(x+2)\ldots(x+p)(x+p+1)} + \frac{((p+1)b_p + c_p)x + (p+1)c_p}{x^3(x+1)(x+2)\ldots(x+p)(x+p+1)} \\
&= \frac{b_p}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+p)(x+p+1)} + \frac{((p+1)b_p + c_p)x + (p+1)c_p}{x^3(x+1)(x+2)\ldots(x+p)(x+p+1)}
\end{aligned}$$

et on peut prendre $a_{p+1} = b_p$, $b_{p+1} = (p+1)b_p + c_p$ et $c_{p+1} = (p+1)c_p$ (par hypothèse de récurrence, a_{p+1}, b_{p+1} et c_{p+1} sont effectivement des entiers).

Le résultat est démontré par récurrence.

II.A.2)

$$\boxed{a_2 = 1,\ b_2 = 3 \text{ et } c_2 = 2 \text{ et } \forall p \geqslant 2,\ a_{p+1} = b_p,\ b_{p+1} = (p+1)b_p + c_p \text{ et } c_{p+1} = (p+1)c_p.}$$

II.A.3) Montrons par récurrence que $\forall p \geqslant 2$, $b_p \geqslant c_p \geqslant 0$.
• Puisque $b_2 = 3$ et $c_2 = 2$, c'est vrai pour $p = 2$.
• Soit $p \geqslant 2$. Supposons que $b_p \geqslant c_p \geqslant 0$. Alors, $c_{p+1} = (p+1)c_p \geqslant 0$ puis $b_{p+1} = (p+1)b_p + c_p \geqslant (p+1)c_p + 0 = c_{p+1}$.

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall p \geqslant 2,\ b_p \geqslant c_p \geqslant 0.}$$

II.A.4) $c_2 = 2$, $c_3 = 3c_2 = 6$ et $c_4 = 4c_3 = 24$. $b_2 = 3$, $b_3 = 3b_2 + c_2 = 11$, $b_4 = 4b_3 + c_3 = 50$. $a_2 = 1$, $a_3 = b_2 = 3$ et $a_4 = b_3 = 11$.

$$\boxed{a_2 = 1,\ a_3 = 3,\ a_4 = 11,\ b_2 = 3,\ b_3 = 11,\ b_4 = 50,\ c_2 = 2,\ c_3 = 6 \text{ et } c_4 = 24.}$$

II.B -
II.B.1) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. D'après la question I.B,

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \leqslant \varepsilon \Leftarrow \frac{1}{2N^2} \leqslant \varepsilon \Leftarrow 2N^2 \geqslant \frac{1}{5 \times 10^{-5}} \Leftarrow N \geqslant 100.$$

$$\boxed{0 \leqslant \zeta(3) - \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^3} \leqslant 5 \times 10^{-5}.}$$

II.B.2) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Toujours d'après la question I.B,

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1)\ldots(n+4)} \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{50n + 50n}{n^7} = 100 \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} \leqslant \frac{100}{5N^5},$$

puis, d'après les questions II.A.1) et II.A.4)

$$\begin{aligned}
\zeta(3) &= \sum_{k=2}^{4} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_k}{n(n+1)\ldots(n+k)} \right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1)\ldots(n+4)} \\
&= (1 \times \sigma(2) + 3\sigma(3) + 11\sigma(4)) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1)\ldots(n+4)}
\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{11}{96}\right)+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1)\dots(n+4)} \text{ (d'après la question I.A.4))}$$

$$= \frac{17}{32}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1)\dots(n+4)},$$

puis, pour $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\zeta(3)-\left(\frac{17}{32}+\sum_{n=1}^{N}\frac{50n+24}{n^3(n+1)\dots(n+4)}\right)=\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{50n+24}{n^3(n+1)\dots(n+4)} \leqslant 1005N^5.$$

Or

$$\frac{100}{5N^5} \leqslant 5\times 10^{-5} \Leftarrow N^5 \geqslant \frac{10^2}{5\times 5\times 10^{-5}} \Leftarrow N^5 \geqslant 4\times 10^5 \Leftarrow N \geqslant 14,$$

et donc

$$\boxed{\zeta(3)-\left(\frac{17}{32}+\sum_{n=1}^{14}\frac{50n+24}{n^3(n+1)\dots(n+4)}\right) \leqslant 5\times 10^{-5}.}$$

II.B.3. On peut par exemple écrire la fonction suivante :

```python
# -*- coding: utf-8 -*-

def approx_dzeta():
    S=17/32
    for n in range(1,15):
        #on calcule le terme d'indice n de la somme, noté u :
        u=(50*n+24)/n**3
        for k in range(1,5):
            u/=(n+k)
        #On ajoute le terme d'indice n à la somme S :
        S+=u
    return S
```

Partie III. – Séries factorielles

III.A. *Sur la continuité d'une série de fonctions.*

III.A.1. On a pour tout $n \geq 1$, $f_n(1) = 0$, donc $f(1) = f_0(1) = 1$.

Pour tout $x \in [0, 1[$, la série géométrique $\sum x^{n-1}(x-1)$ est convergente, puisque $|x| < 1$. La fonction f est donc bien définie en x (ce que l'énoncé admet d'ailleurs, mais tant qu'à faire), et l'on a :

$$\forall\ x \in I,\ f(x) = 1 + \frac{x-1}{1-x} = 0\ .$$

On constate que f n'est pas continue sur I, car elle n'est pas continue en 1.

Remarque

On obtenait le même résultat en remarquant que $\sum x^{n-1}(x-1) = \sum\left(x^n - x^{n-1}\right)$ est une série télescopique.

III.A.2.

III.A.2.a. Les séries $\sum f_n(x_0)$ et $\sum f_n(x)$ étant absolument convergentes, il est correct d'écrire

que $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x_0) - \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leq \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x_0)\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right|$,

puis que $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x_0) - \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left|f_k(x_0)\right| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left|f_k(x)\right|$.

Les fonctions $\left|f_k\right|$ sont décroissantes, on a $a \leq x_0$, $a \leq x$ et la série $\sum \left|f_k(a)\right|$ converge, on a

donc bien $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x_0) - \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leq 2\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left|f_k(a)\right|$.

Par propriété des restes d'une série convergente, $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left|f_k(a)\right| = 0$, donc :

$$\exists\, p \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq p \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left|f_k(a)\right| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

On prend par exemple $n = p$, et l'on a $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x_0) - \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

III.A.2.b. On note encore n un entier tel que $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x_0) - \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Par une nouvelle inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\left|f(x_0) - f(x)\right| &= \left|\left(\sum_{k=0}^{n} f_k(x_0) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right) + \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x_0) - \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right)\right| \\ &\leq \left|\sum_{k=0}^{n} f_k(x_0) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x_0) - \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right|,\end{aligned}$$

d'où $\left|f(x_0) - f(x)\right| \leq \left|\sum_{k=0}^{n} f_k(x_0) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right| + \frac{\varepsilon}{2}$.

La fonction $\sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ est continue comme somme (finie !) de fonctions l'étant, donc

$\lim_{x \to x_0} \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x_0)$, et par suite :

$$\exists\, \eta > 0,\ \forall\, x > a,\ \left|x_0 - x\right| \leq \eta \Rightarrow \left|\sum_{k=0}^{n} f_k(x_0) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On choisit un tel η, et l'on a pour $x > 0$ tel que $\left|x_0 - x\right| \leq \eta$: $\left|f(x_0) - f(x)\right| \leq \varepsilon$.

Première conclusion :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x > a, |x_0 - x| \leq \eta \Rightarrow |f(x_0) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} :$$

f est continue en x_0.

Deuxième conclusion :

Ceci étant vrai pour tout $x_0 > a$ quel que soit $a > 0$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

III.B.1.

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)}\right) &= \ln\left(\frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)}\right) - \ln\left(\frac{v_n(x)}{v_{n-1}(x)}\right) = \ln\left(\frac{n}{x+n}\right) - \ln\left(\frac{n^x}{(n+1)^x}\right) \\
&= -\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) + x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{x}{n} + \frac{x}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\boxed{\forall x > 0, \text{ la série numérique de terme général } \ln\left(\frac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)}\right) \text{ converge.}}$$

III.B.2.

Soit $x > 0$. La série de terme général $\ln(w_n(x)) - \ln(w_{n-1}(x))$ converge. On sait qu'il en est de même de la suite de terme général $\ln(w_n(x))$, $n \in \mathbb{N}$, (séries télescopiques). Si on note $a(x)$ la limite de cette suite, alors $w_n(x) = e^{\ln(w_n(x))}$ tend vers $l(x) = e^{a(x)} > 0$ quand n tend vers $+\infty$.

$$\boxed{\forall x > 0, \exists l(x) \in]0, +\infty[/ \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n(x)}{v_n(x)} = l(x).}$$

III.C.

Soit $x > 0$. D'après ce qui précède (et puisque $l(x) \neq 0$), $u_n(x) \sim l(x)v_n(x)$. Par suite, il existe un rang n_0 tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \frac{l(x)}{2}|a_n|v_n(x)l(x) \leqslant |a_n|u_n(x) \leqslant 2l(x)\,|a_n|v_n(x).$$

Puisque $l(x) \neq 0$, ceci montre que la série numérique de terme $|a_n|u_n(x)$ converge si et seulement si la série numérique de terme général $|a_n|v_n(x)$ converge.

$$\boxed{\forall x > 0, \forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \sum a_n u_n(x) \text{ est AC si et seulement si } \sum a_n u_n(x) \text{ est AC.}}$$

III.D.

III.D.1.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = \dfrac{1}{n+1}$. Soit $x > 0$.

D'après la question III.B -, la série numérique de terme général $|a_n|u_n(x)$ est de même nature que la série numérique de terme général $|a_n|v_n(x) = \dfrac{1}{(n+1)^{x+1}}$. Puisque $x+1 > 1$, $\dfrac{1}{(n+1)^{x+1}}$ est le terme général d'une série de RIEMANN convergente. On en déduit que la série numérique de terme général $a_n u_n(x)$ converge absolument.

$$\boxed{\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}.}$$

III.D.2. Donner un exemple de suite a n'appartenant pas à $\mathcal{A}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = 1$. La série de terme général $|a_n|v_n(x) = \dfrac{1}{(n+1)^x}$ diverge quand $x = 1$ et donc

$$\boxed{(1)_{n\in\mathbb{N}} \notin \mathscr{A}.}$$

III.E.1. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\sum\limits_{n\geq 0} a_n u_n(x)$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto |a_n u_n(x)|$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On peut donc appliquer le résultat prouvé En **III.A.** : f_a est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

III.E.2.

III.E.2.a. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_n(x+1) &= \frac{n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+n+1)} \\ &= \frac{x}{x+n+1}\,\frac{n!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)} \\ &= \frac{x}{x+n+1}u_n(x) \leq \frac{x}{x+1}u_n(x) \qquad \square \end{aligned}$$

III.E.2.b. D'après ce qui précède, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [k, k+1]$,

$0 \leq u_n(x+1) \leq \dfrac{x}{x+1}u_n(x)$. On peut sommer et écrire que

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}|a_n|u_n(x+1) \leq \dfrac{x}{x+1}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}|a_n|u_n(x)$, car il y a absolue convergence.

On a donc $g_a(x+1) \leq \dfrac{x}{x+1}g_a(x)$; la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ étant croissante sur $[k, k+1]$: $g_a(x+1) \leq \dfrac{k+1}{k+2}g_a(x)$. Alors $g_a(x+1) \leq \dfrac{k+1}{k+2}M_k$, et ce pour tout $x \in [k, k+1]$, d'où $M_{k+1} \leq \dfrac{k+1}{k+2}M_k$.

Les inégalités $M_k \leq \dfrac{2}{k+1}M_1$, $k \in \mathbb{N}^*$, s'en déduisent par une récurrence facile.

III.E.2.c. On a $|f_a| \leq |g_a|$, d'où, d'après ce qui précède :

$$\forall\ k \in \mathbb{N}^*,\ \sup_{[k,+\infty[} |f_a| \leq \sup_{[k,+\infty[} |g_a| \leq \sup_{p \geq k} \frac{2}{p+1} M_1 = \frac{2}{k+1}.$$

$\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{2}{k+1} = 0$ entraîne donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_a(x) = 0$.

III.F.

III.F.1.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction u_n est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$. De plus, la fonction u_n est strictement positive sur $]0,+\infty[$ et pour $x > 0$

$$\ln(u_n(x)) = \ln(n!) - \sum_{k=0}^{n} \ln(x+k).$$

En dérivant cette dernière égalité (dérivée logarithmique), on obtient pour $x > 0$ $\dfrac{u_n'(x)}{u_n(x)} = -\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{x+k}$. Par suite,

$$\begin{aligned} |u_n'(x)| &= u_n(x)\left(\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x+k}\right) \leqslant u_n(x)\left(\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x+t}\,dt\right) \\ &= u_n(x)\left(\frac{1}{x} + \int_0^n \frac{1}{x+t}\,dt\right) = u_n(x)\left(\frac{1}{x} + \ln\left(1 + \frac{n}{x}\right)\right). \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R}) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x > 0,\ |u_n'(x)| \leqslant u_n(x)\left(\frac{1}{x} + \ln\left(1 + \frac{n}{x}\right)\right).}$$

III.F.2. D'après **III.C.**, la série de terme général $|a_n|\, u_n(x)\left(\dfrac{1}{x} + \ln\left(1 + \dfrac{n}{x}\right)\right)$ est de même nature que la série de terme général $|a_n| \dfrac{\frac{1}{x} + \ln\left(1 + \frac{n}{x}\right)}{(n+1)^x}$. Or par croissances comparées,

$$(n+1)^{\frac{x}{2}} \frac{\frac{1}{x} + \ln\left(1 + \frac{n}{x}\right)}{(n+1)^x} = \frac{\frac{1}{x} + \ln\left(1 + \frac{n}{x}\right)}{(n+1)^{\frac{x}{2}}} \underset{n \to +\infty}{\rightarrow} \text{, et donc}$$

$$|a_n| \frac{\frac{1}{x} + \ln\left(1 + \frac{n}{x}\right)}{(n+1)^x} \underset{n \to +\infty}{\rightarrow} o\left(\frac{|a_n|}{(n+1)^{\frac{x}{2}}}\right).$$ A nouveau d'après **III.C.**, la série de terme général $\dfrac{|a_n|}{(n+1)^{\frac{x}{2}}}$ est de même nature que la série de terme général $|a_n|\, u_n\left(\dfrac{x}{2}\right)$, elle est donc

convergente puisque $a \in \mathcal{A}$. On en déduit que la série $\sum |a_n| \dfrac{\frac{1}{x} + \ln\left(1 + \frac{n}{x}\right)}{(n+1)^x}$ converge, puis que la série $\sum a_n u_n'(x)$ est absolument convergente.

Partie IV – Représentation intégrale

IV.A.1.

Chaque P_k, $k \in [\![0, n]\!]$, est de degré n et donc dans $\mathbb{R}_n[X]$. De plus, $\text{card}(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} = n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X]) < +\infty$ et pour montrer que la famille $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, il suffit de vérifier que cette famille est libre. Soit $(\lambda_i)_{0 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^{n+1}$.

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![0, n]\!],\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i(-k) = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![0, n]\!],\ \lambda_k P_k(-k) = 0$$
$$\Rightarrow \forall k \in [\![0, n]\!],\ \lambda_k = 0 \text{ (car } \forall k \in [\![0, n]\!],\ P_k(-k) \neq 0).$$

$$\boxed{\text{La famille } (P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$$

IV.A.2.

Le polynôme $P = n!$ est de degré 0 et donc est dans $\mathbb{R}_n[X]$. Par suite, il existe $(\alpha_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $n! = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k$. On divise les deux membres de cette égalité par $X(X+1)\dots(X+n)$ et on obtient

$$\frac{n!}{X(X+1)\dots(X+n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{X+k}.$$

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On sait que

$$\alpha_k = \lim_{x \to -k} (x+k) \times \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)} = \frac{n!}{(-k)(-k+1)\dots(-k+(k-1))(-k+(k+1))\dots(-k+n)}$$
$$= \frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!} = (-1)^k \binom{n}{k} \in \mathbb{Q}.$$

$$\boxed{\forall x > 0,\ \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{X+k}.}$$

IV.B. Soit $a \in \mathcal{A}$. Par définition de $\mathcal{A}$ et d'après **III.C.**, la série de terme général $\dfrac{|a_n|}{(n+1)^x}$ converge, pour tout $x > 0$. En particulier, donc en particulier $\sum \dfrac{|a_n|}{n+1}$ converge, et donc

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{|a_n|}{n+1} = 0$, ce qui revient à dire que $|a_n| = o(n+1)$. On a donc $a_n y^n = o\left((n+1) y^n\right)$; or puisque $|y| < 1$, la série géométrique dérivée $\sum (n+1) y^n$ est absolument convergente. Par suite, la série $\sum\limits_{n \geq 0} a_n y^n$ converge absolument.

IV.C.1. Ici les fonctions sont continues sur $[0,1[$. On se ramène immédiatement au cas de fonctions continues sur $]0,1]$par le changement de variables $z = 1 - y$, on pose donc quand c'est possible :

$$\int_0^1 h(y)\,dy = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} h(y)\,dy.$$

On a donc $\displaystyle\int_0^1 (1-y)^{x-1+k}\,dy = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} (1-y)^{x-1+k}\,dy$, ce qui donne :

$$\int_0^1 (1-y)^{x-1+k}\,dy = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[-\frac{(1-y)^{x+k}}{x+k} \right]_0^{1-\varepsilon} = \frac{1}{x+k}.$$

IV.C.2.

Soient $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in]0,1[$.Les deux fonctions $x \mapsto -\dfrac{(1-y)^x}{x}$ et $y \mapsto y^n$ sont de classe C^1 sur le segment $[0, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_0^A (1-y)^{x-1} y^n \,dy = \left[-\frac{(1-y)^x}{x} y^n \right]_0^A + \frac{n}{x} \int_0^A (1-y)^x y^{n-1}\,dy = -\frac{(1-A)^x}{x} A^n + \frac{n}{x} \int_0^A (1-y)^x y^{n-1}\,dy.$$

Quand A tend vers 1, on obtient

$$\forall x > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^1 (1-y)^{x-1} y^n\,dy = \frac{n}{x} \int_0^1 (1-y)^x y^{n-1}\,dy.$$

En appliquant plusieurs fois la formule précédente, on obtient pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_0^1 (1-y)^{x-1} y^n\,dy = \frac{n}{x} \times \frac{n-1}{x+1} \times \dots \frac{1}{x+n-1} \int_0^1 (1-y)^{x+n-1} y^0\,dy = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)},$$

cette dernière expression restant valable quand $n = 0$.

$$\boxed{\forall x > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^1 (1-y)^{x-1} y^n\,dy = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.}$$

Par suite, pour $a \in \mathscr{A}$ et $x > 0$, $f_a(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^1 (1-y)^{x-1} y^n\,dy.$

IV.D. D'après le résultat admis en question précédente :

$$\forall x > 0,\ f_a(x) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (1-y)^{x-1} y^n\,dy = \int_0^1 (1-y)^{x-1} \phi_a(y)\,dy.$$