Programme de colles S1 (séries)

PC - Lakanal

2025- 2026

Semaine du 22 – 09 au 26 – 09

Suites numériques

Révisions de première année

Séries numériques

1. **Définitions :** série numérique ; sommes partielles d'une série ; nature, somme d'une série.
2. **Premières propriétés :** linéarité ; invariance de nature par troncature, convergence des séries complexes.
3. **Liens entre restes, sommes partielles, et terme général d'une série convergente**

II. Premiers critères de convergence

1. **Le théorème de convergence par majoration pour les séries à terme général positif**

   Version majoration de la suite des sommes partielles, version majoration du terme général ; versions o, O, $\sim$.

2. **Divergence grossière ; convergence absolue**

   Notion de séries semi - convergentes. La suite (u_n) est dite sommable lorsque la série $\sum u_n$ converge absolument.

III. Séries usuelles : séries géométriques, géométriques dérivées première et seconde, exponentielles ; séries de Riemann

IV. D'autres critères de convergence

1. **Comparaison série / intégrale**

   a. **Premières notions sur les intégrales généralisées**

   Nature de $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, f étant continue par morceaux sur $[a, +\infty[$. Les propriétés nécessaires à l'établissement des résultats qui suivent ont été données, mais l'étude des intégrales généralisées sera l'objet d'un chapitre ultérieur.

   b. **Théorème de comparaison série/intégrale**

   Théorème fondamental : si f est continue par morceaux, décroissante et positive sur un voisinage $[a, +\infty[$ de $+\infty$, la série de terme général $f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Corollaire (théorème de comparaison série intégrale) : sous les mêmes hypothèses, la série $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. Equivalent des sommes partielles en cas de divergence, encadrement du reste en cas de convergence. Application aux séries de Riemann. On doit pouvoir traiter le cas des séries de Bertrand.

2. **Comparaison à des séries usuelles**

   a. **Comparaison à une série géométrique :** règle de d'Alembert.

   b. **Comparaison à une série de Riemann :** règle du "$n^{\alpha} u_n$"

3. **Théorème spécial des séries alternées**

   \+ Encadrement de la somme, signe du reste et majoration de sa valeur absolue.

V. Produits de Cauchy ; formule de Stirling (preuves non exigibles)

Prévisions pour la semaine 2

Même programme.