Liste d'exercices

Suites numériques : révisions de première année

0 – Préliminaires sommatoires

Exercice 12

Calcul du noyau de Dirichlet

Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in \left]0, \pi\right[$: $\dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{m} \cos(n t) = \dfrac{\sin\left(\left(m + \frac{1}{2}\right) t\right)}{2 \sin \frac{t}{2}}$.

Exercice 13

Calculer la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$. *Chercher a et b tels que* $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$.

Exercice 14

Calculer les sommes suivantes :

$A = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{3^k}$. $\quad B = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{k}{3^k}$. $\quad C = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)}{3^k}$. $\quad D = \displaystyle\sum_{k=14}^{n+13} 12 . 3^{2k+2} 5^{n-3k}$.

Exercice 15

Calculer les sommes :

1.a. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$. $\qquad$ 1.**b.** $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$.

2.a. $U_n = \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k}$ et $V_n = \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k}$.

2.b.* $X_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor} \binom{n}{3k}$, $Y_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor} \binom{n}{3k+1}$, $Z_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-2}{3} \right\rfloor} \binom{n}{3k+2}$.

1 – Suites numériques : généralités

Exercice 16

Un exercice epsilonesque

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers ℓ. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \dfrac{1}{2^n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k$.

Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Exercice 17

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \cos u_n\right)$.

1. Montrer que l'équation $x = \cos x$ admet une unique solution réelle, que l'on notera α.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

3. Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\cos u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Exercice 18

Soient φ un réel, et a un réel strictement positif. On définit deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

- $v_0 = a,\ u_0 = v_0 \operatorname{ch}\varphi$;

•• $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \sqrt{v_n\, u_{n+1}}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n \operatorname{ch}\left(\dfrac{\varphi}{2^n}\right)$.

2. Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

3. Donner une expression de v_n en fonction de n, a et φ, utilisant le signe produit.

4. Simplifier l'expression obtenue en **2.** *On pourra multiplier le produit écrit précédemment par* $\operatorname{sh}\left(\dfrac{\varphi}{2^n}\right)$.

5. Déterminer la limite des suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 19

Soit $f : \left(\begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lim\limits_{n \to +\infty}\left(\lim\limits_{m \to +\infty}\left(\cos(n!\,\pi\, x)\right)^{2m}\right) \end{array}\right)$.

Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$, mais qu'elle n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

Indication : distinguer le cas x rationnel, et x irrationnel.

2 – Comparaison de suites numériques

Exercice 20

Donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de :

1. $u_n = \sin\left(\sqrt{\pi^4 + 4\pi^3 n + 2\pi^2 n^2}\right)$.

2. $v_n = n!\sin\left(\left(e - \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n!}\right)\pi\right)$. *Indication : à l'ordre $n+1$, la formule de Taylor…*

3. $w_n = \left(\dfrac{3^{\frac{1}{n}} + 4^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n$.

4. $x_n = \left(n \sin\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} - e^{-\frac{1}{6}}$.

3 – *Suites usuelles*

Exercice 21

1. Soit $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético – géométrique. Montrer que la suite $\left(u_{n+1}-u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

On considère désormais un réel $\alpha\neq 1$, et une suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. On suppose que la suite $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\ n\in\mathbb{N},\ v_n=u_{n+1}-u_n$$

est géométrique de raison α.

2.a. Montrer qu'il existe un unique réel β tel que $u_1=\alpha u_0+\beta$.

2.b. Exprimer v_n en fonction de α, β, u_0 et n.

2.c. En déduire une expression de u_n en fonction de α, β, u_0 et n.

2.d. Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\alpha u_n+\beta$. Conclure.

3. Montrer qu'une suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético – géométrique si et seulement si il existe $q\neq 1$

et a, b non nuls tels que : $\forall\ n\in\mathbb{N},\ u_n=q^n a+b$.

On considérera ici qu'une suite arithmétique ou géométrique ***n'est pas*** *arithmético – géométrique.*

Exercice 22

Une suite homographique

On considère la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=5$, et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=\dfrac{5u_n-9}{u_n-1}$.

1. Montrer que l'équation $X=\dfrac{5X-9}{X-1}$ admet une unique solution réelle. On note α cette solution.

2. Pour tout $n\geq 0$, on pose : $v_n=\dfrac{1}{u_n-\alpha}$. Montrer que la suite $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, et qu'elle est arithmétique.

3. En déduire v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

4 – *Suites du type* $u_{n+1}=f\left(u_n\right)$

Exercice 23

Etudier la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0>0$ et $\forall\ n\in\mathbb{N},\ \ u_{n+1}=\arctan u_n$.

Exercice 24

On considère la fonction numérique f définie par $f\left(x\right)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x+2}$.

1. Prouver que f possède un unique point fixe dans l'intervalle $\left[0,1\right]$, que l'on notera α.

2. On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie par $u_0=\dfrac{1}{2}$, et $\forall\ n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f\left(u_n\right)$. Prouver que cette suite converge vers α.

3. Borner $f\,'$ sur $\left[0,1\right]$ et en déduire : $\forall\ n\in\mathbb{N},\ 0\leq\alpha-u_n\leq\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2\mathrm{e}}{9}\right)^n$.

4.a. En déduire la valeur de n à partir de laquelle u_n est une valeur approchée de α à 10^{-3} près,

4.b. Donner cette valeur approchée. *On écrira une fonction adaptée, en Python.*

Exercice 25

Soit la suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{12 - u_n}$.

1. Montrer que la suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 4]$.

2. Montrer que $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une unique finie possible ℓ, que l'on déterminera.

3. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|u_{n+1} - \ell\right| \leq \dfrac{1}{4}\left|u_n - \ell\right|$, puis que $\left|u_n - \ell\right| \leq \dfrac{3}{4^n}$.

4. Conclure.

Exercice 26

Soit la suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{12 - u_n}$.

1. Montrer que la suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 4]$.

2. Montrer que la suite $\left(u_{2n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, et que la suite $\left(u_{2n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

3. Soit $f : x \mapsto \sqrt{12 - x}$. Déterminer les points fixes de l'application $f \circ f$ sur $[0, 4]$.

4. Prouver que les suites $\left(u_{2n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(u_{2n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes, et conclure.

Exercice 27

Méthode de Newton

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et soit $f \in C^2\left([a, b], \mathbb{R}\right)$. On suppose que :

$$f(a) > 0 \ , \ f(b) < 0 \ , \ f' < 0 \ \text{ et } \ f'' > 0 \ \text{ sur } [a, b] \ .$$

1. Montrer qu'il existe un unique $c \in \,]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

2. On considère la suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$, et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - \dfrac{f\left(u_n\right)}{f'\left(u_n\right)}$.

Montrer que la suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie, et converge vers c.

3. On note respectivement m et M le minimum de $|f'|$ et le maximum de $|f''|$ sur $[a, b]$.

a. Montrer que pour tout entier n : $0 \leq c - u_{n+1} \leq \dfrac{M}{2m}\left(c - u_n\right)^2$.

b. Montrer qu'il existe deux constantes A et q telles que pour tout entier n : $0 \leq c - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{A} q^{2^n}$. Conclure.

5 – D'autres types de suites

Exercice 28

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que l'équation $x\,\mathrm{e}^x = n$ admet une unique solution $x_n \in \mathbb{R}$.

2. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} x_n$ et prouver que $x_n \sim \ln n$.

3. Donner un équivalent de $u_n - \ln n$.

Exercice 29

1. Montrer que l'équation $(E) : \sum_{k=1}^{n} x^k = 1$ admet une unique racine dans $[0, 1]$.

On posera $f_n(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} x^k \right) - 1$*, et on notera* x_n *cette racine unique.*

2. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est monotone, et en déduire sa convergence.

hint *On considèrera, pour tout entier* $n \in \mathbb{N}^*$*, la quantité* $f_{n+1}(x_n)$.

3. Déterminer la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 30

Pour tout entier $n \geq 2$, on note $(\boldsymbol{E_n})$ l'équation $(\boldsymbol{E_n})$: $x^n - x = n$.

1. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $(\boldsymbol{E_n})$ admet une unique solution u_n sur $\mathbb{R}^+$, et prouver que $u_n \in [1, +\infty[$.

2. Montrer que quel que soit $n \geq 2$, $n^{\frac{2}{n}} \leq n$. En déduire la limite de $(u_n)_{n \geq 2}$.

3. On pose $v_n = u_n - 1$. Vérifier que $n \ln(v_{n+1}) = \ln(v_n + n - 1)$. En déduire que $v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$.

Exercice 31

Intégrales de Wallis

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \, dt$.

1. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

2. Calculer I_0 et I_1. En déduire la valeur de I_n pour tout entier naturel n.

3. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire que $I_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} I_n$.

4. Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = (n+1) I_{n+1} I_n$. Montrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

5. Déduire des deux questions précédentes que $I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 32

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et telle que $f(0) = 1$.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{f'(0)}{2}$. *On pourra utiliser une formule de Taylor*.

6 – et deux de plus…

Exercice 33

Une source inépuisable d'exercices

1. Etudier la suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée de son premier terme $u_0 = \dfrac{1}{2}$, et par les relations de récurrence : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\left(1 + u_n^2\right)^2}$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose : $v_n = u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha}$. Montrer qu'il existe un unique réel α, que l'on déterminera, tel que $\left(v_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ ***non nul***, réel que l'on déterminera également.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell$.

4. En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 34

Soit $\left(z_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes vérifiant : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(z_n + \left|z_n\right|\right)$

1. Montrer que la suite $\left(\left|z_n\right|\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. *On notera* ρ *sa limite.*

2. Prouver alors que la suite $\left(z_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et déterminer sa limite.