Séries numériques

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I GÉNÉRALITÉS

1. La notion de série

Soit $\left(u_n\right)_{n \geq n_0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

Définition 1 (série numérique ; sommes partielles d'une série)

- On appelle ***série de terme général*** $\boldsymbol{u_n}$, notée $\sum\limits_{n \geq n_0} u_n$, le couple de suites $\left(\left(u_k\right)_{n \geq n_0}, \left(\sum\limits_{k = n_0}^{n} u_k\right)_{n \geq n_0}\right)$.

  S'il n'y a pas d'ambiguïté quant à son indice initial, la même série pourra également être notée $\sum u_n$.

- • Pour tout $N \geq n_0$, la somme $S_N = \sum\limits_{n = n_0}^{N} u_n$ est appelée ***somme partielle d'ordre*** $\boldsymbol{N}$ de la série $\sum\limits_{n \geq n_0} u_n$.

Définition 2 (nature, somme d'une série)

- On dit que la série $\sum\limits_{n \geq n_0} u_n$ ***converge*** lorsque la suite $\left(S_N\right)_{N \geq n_0} = \left(\sum\limits_{n = n_0}^{N} u_n\right)_{N \geq n_0}$ de ses sommes partielles est convergente. Dans ce cas, on note $\sum\limits_{n = n_0}^{+\infty} u_n$ la limite de cette suite, et on l'appelle ***somme de la série*** $\sum\limits_{n \geq n_0} \boldsymbol{u_n}$.

  Ainsi, la somme $\sum\limits_{n = n_0}^{+\infty} u_n$ *de la série* $\sum\limits_{n \geq n_0} u_n$ *est définie si et seulement la suite* $\left(\sum\limits_{n = n_0}^{N} u_n\right)_{N \geq n_0}$ *admet une limite finie, et, lorsque tel est le cas, cette somme est donnée par*

$$\sum_{n = n_0}^{+\infty} u_n = \lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{n = n_0}^{N} u_n\right).$$

- • Lorsque la suite $\left(\sum\limits_{n = n_0}^{N} u_n\right)_{N \geq n_0}$ n'admet pas de limite, ou admet une limite infinie, la série $\sum\limits_{n \geq n_0} u_n$ est dite ***divergente***.

- • • Déterminer la ***nature*** d'une série, c'est prouver sa convergence ou sa divergence.

2. Premières propriétés

i – ***linéarité***

- Si $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} v_n$ sont deux séries convergentes, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, la série $\sum_{n \geq n_0} (\lambda u_n + v_n)$ converge, et $\sum_{n = n_0}^{+\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_{n = n_0}^{+\infty} u_n + \sum_{n = n_0}^{+\infty} v_n$.

•• Si $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge, et si $\sum_{n \geq n_0} v_n$ diverge, alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\sum_{n \geq n_0} (\lambda u_n + v_n)$ diverge.

Bien sûr, on ne peut rien dire de général quant à la nature de $\sum_{n \geq n_0} (\lambda u_n + v_n)$ *lorsque* $\sum_{n \geq n_0} u_n$ *et* $\sum_{n \geq n_0} v_n$ *divergent toutes deux…*

Il découle de du résultat précédent que, si l'on note $E(\mathbb{K})$ l'ensemble des suites $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, $E(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, et l'application $u \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est une forme linéaire sur cet espace, ie. une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$).

ii – ***Convergence d'une série de terme général complexe***

Soit une série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ de terme général complexe.

Alors, $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge si et seulement si $\sum_{n \geq n_0} \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum_{n \geq n_0} \mathrm{Im}(u_n)$ convergent, et lorsque tel est le cas : $\sum_{n = n_0}^{+\infty} u_n = \sum_{n = n_0}^{+\infty} \mathrm{Re}(u_n) + i \sum_{n = n_0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u_n)$.

iii – ***Invariance de nature par troncature***

Soit une série $\sum_{n \geq n_0} u_n$, et soit un entier $n_1 \geq n_0$.

Alors, les séries $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_1} u_n$ sont de même nature.

3. Restes, sommes partielles, et terme général d'une série convergente

i – ***Définition (suite des restes d'une série convergente)***

Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ une série ***convergente***. Pour tout $N \geq n_0 - 1$, on définit R_N, **reste d'ordre** $\boldsymbol{N}$ de la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$, par : $R_N = \sum_{n = N+1}^{+\infty} u_n$.

ii – ***La suite des restes, si elle est définie, converge vers 0***

- Pour tout $N \geq n_0 - 1$, le reste d'ordre N de la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ existe si et seulement $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est une série convergente.

•• Lorsque tel est le cas, $\lim_{N \to +\infty} R_N = 0$.

iii – Restes, termes généraux, somme et sommes partielles

Considérons une série $\sum_{n \geq n_0} u_n$. Notons (S_n) la suite de ses sommes partielles. Alors :

- $u_{n_0} = S_{n_0}$, et pour tout $n > n_0$, $u_n = S_n - S_{n-1}$.

  Si l'on pose $S_{n_0-1} = \sum_{n=n_0}^{n_0-1} u_n$, alors $S_{n_0-1} = 0$ (somme indexée par l'ensemble vide), et l'on a maintenant aussi $u_{n_0} = S_{n_0} - S_{n_0-1}$.

Si l'on suppose de plus $\sum_{n \geq n_0} u_n$ convergente, et que l'on note $(R_N)_{N \geq n_0 - 1}$ la suite des restes de cette série :

- • • Pour tout $n \geq n_0$, $u_n = R_{n-1} - R_n$.
- • • • Pour tout $n \geq n_0$, $\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = S_n + R_n$.

4. Sur la dualité suite/série

la ***suite*** $(u_n)_{n \geq n_0}$ converge si et seulement si la ***série*** $\sum_{n \geq n_0} (u_{n+1} - u_n)$ converge.

II PREMIERS CRITÈRES DE CONVERGENCE

1. Le théorème de convergence par majoration pour les séries à terme général positif

Proposition 1

Soit $\sum u_n$ une série à terme général positif à partir d'un certain rang. Alors,

- $\sum u_n$ converge **ssi** la suite (S_n) de ses sommes partielles est majorée.
- $\sum u_n$ diverge si et seulement si $\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.

Preuve : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1}$; le fait que u_{n+1} soit positif à partir d'un certain rang assure que, également à partir d'un certain rang, (S_n) est croissante. La proposition ci – dessus est alors une conséquence directe du théorème de la limite monotone, appliqué à la suite (S_n).

On déduit de cette proposition les corollaires suivants :

Théorème (de comparaison pour les séries à terme général positif)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries telles qu'à partir d'un certain rang, l'on ait : $0 \leq u_n \leq v_n$.

Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

Par contraposition, si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Théorème (de comparaison pour les séries à terme général positif, version domination)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à terme général positif. On suppose que $u_n = O(v_n)$.

Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

Par contraposition, si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Théorème** (**de comparaison pour les séries à terme général positif, version négligeabilité)

> Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n = o\left(v_n\right)$.
>
> Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
>
> Par contraposition, si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Théorème** (**de comparaison pour les séries à terme général positif, version équivalents)

> Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques dont l'une est à termes positifs à partir d'un certain rang. On suppose que : $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$ (*ce qui assure aussi que l'autre série est à termes positifs à partir d'un certain rang*).
>
> Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature (*i.e.* convergent ou divergent simultanément).

2. Divergence grossière ; convergence absolue ou sommabilité

a. *La notion de divergence grossière*

Proposition (une condition nécessaire de convergence)

> **Si** la série $\sum u_n$ converge, **alors** son terme général tend vers zéro, *i.e.* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Il découle immédiatement de cette proposition que

> Toute série dont le terme général ne tend pas vers zéro est divergente.
>
> *On parle alors de série **grossièrement divergente**.*

En revanche, dire qu'une série converge parce que son terme général tend vers 0, c'est dire une **énorme bêtise**, comme le montre l'exemple de la ***série harmonique*** $\sum \frac{1}{n}$, qui est **divergente**.

Preuve

Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite $\left(S_n\right)$ de ses sommes partielles admet une limite finie ; il en résulte que

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(S_n - S_{n-1}\right) = 0$, soit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

b. *Convergence absolue*

Définition (série absolument convergente ; suite sommable)

> Soit $\sum u_n$ une série numérique, réelle ou complexe.
>
> On dit que $\sum u_n$ est ***absolument convergente*** ssi la série $\sum \left|u_n\right|$ est convergente. Lorsque tel est le cas, on dit également que la suite $\left(u_n\right)$ est **sommable**, et l'on note : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left|u_n\right| < +\infty$. Dans le cas contraire, on écrira que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left|u_n\right| = +\infty$.

Théorème (la convergence absolue implique la convergence)

> **Toute série absolument convergente est convergente**.
>
> De plus, si $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge absolument, on a l'inégalité triangulaire : $\left| \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|$.

Preuve

Tout d'abord, la convergence d'une série, ou sa convergence absolue, ne dépend pas de ses premiers termes ; quitte à en enlever ou à en ajouter, on peut donc supposer que $n_0 = 0$. Supposons maintenant que la série $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ converge.

Si (u_n) est à valeurs réelles

On a : $\forall\, n \geq n_0, u_n = (u_n + |u_n|) - |u_n| = v_n - |u_n|$, où $v_n = u_n + |u_n|$.

On note que si $u_n \leq 0$, alors $v_n = 0$, et, si $u_n \geq 0$, alors $v_n = 2u_n \geq 0$. Donc dans tous les cas, $v_n \geq 0$.

Plus précisément : $\forall\, n \geq n_0, 0 \leq 2v_n \leq 2|u_n|$.

La série $\sum |u_n|$ converge par hypothèse. Le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs assure alors la convergence de la série $\sum v_n$. Mais comme : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = v_n - |u_n|$, la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est alors convergente comme différence de deux séries convergentes. De plus :

$$\forall\, n \geq n_0,\ -|u_n| \leq u_n \leq |u_n|,$$

donc immédiatement : $$-\sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|.$$

C'est dire précisément que : $$\left| \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|.$$

Si (u_n) est à valeurs complexes

On a pour tout $n \geq n_0$, $|\mathcal{Re}(u_n)| \leq |u_n|$ et $|Im(u_n)| \leq |u_n|$; par hypothèse, $\sum |u_n|$ converge, le théorème de comparaison permet d'en déduire que $\sum |\mathcal{Re}(u_n)|$ et $\sum |Im(u_n)|$ convergent. Ainsi, $\sum |\mathcal{Re}(u_n)|$ et $\sum |Im(u_n)|$ sont absolument convergentes. On est alors ramené au cas de séries de terme général réel, étudiées ci – dessus. On peut donc affirmer que $\sum |\mathcal{Re}(u_n)|$ et $\sum |Im(u_n)|$ sont toutes deux convergentes, et ceci entraîne la convergence de la série $\sum u_n$.

En outre : $\forall\, N \geq n_0$, $\left| \sum_{n=n_0}^{N} u_n \right| \leq \sum_{n=n_0}^{N} |u_n|$ par inégalité triangulaire, et l'on retrouve $\left| \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|$ par passage à la limite.

Remarque – définition

> La réciproque de cette propriété est fausse : il existe des séries **semi – convergentes**,
> *i.e.* convergentes, mais non absolument convergentes.

***Par exemple**, nous savons que **la série harmonique** $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ **diverge**, et nous verrons aussi que **la série harmonique alternée** $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ **converge** (sa somme valant $\ln(2)$).*

III SÉRIES USUELLES

1. Séries géométriques

Ce sont les séries du type $\sum q^n$. Elles convergent si et seulement si $\boxed{|q| < 1}$. Dans ce cas, on a :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}}.$$

Preuve

Si $|q| \geq 1$, $\sum q^n$ est grossièrement divergente, donc divergente. Si $|q| < 1$, on a pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$, et $\lim_{N \to +\infty} q^{N+1} = 0$; la convergence de $\sum q^n$ s'ensuit, ainsi que l'égalité $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

2. Séries exponentielles

Pour tout $a \in \mathbb{C}$ *(donc a fortiori pour tout* $a \in \mathbb{R}$ *…)*, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{n!}$ converge absolument, et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} = \mathrm{e}^a$.

Preuve

Pour $a = 0$, le résultat est évident. Supposons désormais a non nul, et écrivons ce complexe sous forme exponentielle : $a = \rho\, \mathrm{e}^{i\theta}$, avec $\rho > 0$, et par exemple $\theta \in [0, 2\pi[$. Considérons l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \exp\left(t\,\mathrm{e}^{i\theta}\right) \end{cases}$; f est de classe C^∞, avec pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f^{(k)}(t) = \mathrm{e}^{ik\theta} \exp\left(t\,\mathrm{e}^{i\theta}\right)$. A fortiori, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe C^{n+1} sur $[0, \rho]$; la formule de Taylor avec reste intégral s'applique donc : on a $\mathrm{e}^a = f(\rho) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \rho^k + \int_0^\rho \frac{(\rho - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, \mathrm{d}t$.

Alors, $\mathrm{e}^a = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{e}^{ik\theta} \rho^k}{k!} + \int_0^\rho \frac{(\rho - t)^n}{n!} \mathrm{e}^{i(n+1)\theta}\, \mathrm{e}^{t\,\mathrm{e}^{i\theta}}\, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} + \int_0^\rho \frac{(\rho - t)^n}{n!} \mathrm{e}^{i(n+1)\theta}\, \mathrm{e}^{t\,\mathrm{e}^{i\theta}}\, \mathrm{d}t$,

d'où l'on déduit que $\left| \mathrm{e}^a - \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \right| \leq \int_0^\rho \left| \frac{(\rho - t)^n}{n!} \mathrm{e}^{i(n+1)\theta}\, \mathrm{e}^{t\,\mathrm{e}^{i\theta}} \right| \mathrm{d}t$, puis que $\left| \mathrm{e}^a - \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \right| \leq \int_0^\rho \frac{\rho^n}{n!} \mathrm{e}^\rho\, \mathrm{d}t = \frac{\rho^{n+1}}{n!} \mathrm{e}^\rho$.

Par croissances comparées, $\lim_{n \to +\infty} \frac{\rho^{n+1}}{n!} \mathrm{e}^\rho = 0$; il en résulte que $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} = \mathrm{e}^a$: ceci revient à dire que $\sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{n!}$ converge, et que l'on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} = \mathrm{e}^a$. La convergence est absolue, car ce qui précède s'applique également à $b = |a|$, c'est – à – dire que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{b^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \left| \frac{a^n}{n!} \right|$ converge.

3. Séries de Riemann

Ce sont les séries du type $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. Elles convergent si et seulement si $\boxed{\alpha > 1}$.

Preuve

C'est un exemple – type d'application du critère de comparaison série/intégrale : cf. le paragraphe **IV**.

IV D'AUTRES CRITÈRES DE CONVERGENCE :

Comparaison série/intégrale, règles de d'Alembert et du $n^{\alpha} u_n$, critère spécial des séries alternées

1. Comparaison série / intégrale

a. *Une définition*

Soit f **positive**, continue par morceaux sur $[a, +\infty[$; on dit que f est intégrable sur $[a, +\infty[$ si et seulement si la limite $\lim\limits_{A \to +\infty} \int_a^A f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et est finie. Lorsque tel est le cas, on pose :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(t)\,\mathrm{d}t .$$

On remarquera que

- Pour tout $b \geq a$, pour tout $A \geq b$, $\int_a^A f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^A f(t)\,\mathrm{d}t$. On en déduit que $\lim\limits_{A \to +\infty} \int_a^A f(t)\,\mathrm{d}t$ existe dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\lim\limits_{A \to +\infty} \int_b^A f(t)\,\mathrm{d}t$ existe dans $\mathbb{R}$:

  pour tout $b \geq a$, f est intégrable sur $[a, +\infty[$ si et seulement si elle est intégrable sur $[b, +\infty[$.

- • Puisque f est à valeurs positives, l'application $A \mapsto \int_a^A f(t)\,\mathrm{d}t$ est croissante. Par conséquent : d'après le théorème de la limite monotone, $\lim\limits_{A \to +\infty} \int_a^A f(t)\,\mathrm{d}t$ existe dans $\mathbb{R}$ si et seulement si l'application $A \mapsto \int_a^A f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée. Or pour tout réel $A \geq a + 1$, on a en notant n la partie entière de A :

  $\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^A f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$. Il en résulte que l'application $A \mapsto \int_a^A f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée si et seulement si la suite $\left(\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n \geq a}$ l'est. Lorsque tel est le cas, comme $\left(\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n \geq a}$ est une suite croissante majorée, elle converge.

  En conclusion :

  La fonction f est intégrable sur $[a, +\infty[$ si et seulement si la suite $\left(\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n \geq a}$ est majorée .

b. *Théorème de comparaison série/intégrale*

Soient $a \in \mathbb{R}$, $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq a + 1$, et f continue par morceaux sur $[a, +\infty[$.

On suppose que l'application f est **décroissante** et **positive** .

Alors la série $\sum\limits_{n \geq n_0} f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

Preuve

Soit $n_0 = \lfloor a \rfloor + 1$. La décroissance de f assure que pour tout $k \geq n_0 + 1$:

$$\forall t \in [k-1, k],\ f(k) \leq f(t) \leq f(k-1).$$

On en déduit, par croissance de l'opérateur intégral, que $\int_{k-1}^{k} f(k)\,\mathrm{d}t \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_{k-1}^{k} f(k-1)\,\mathrm{d}t$, soit :

$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k-1)$. On en déduit que pour tout $n \geq n_0 + 1$,

$\sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \leq \sum_{k=n_0+1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k-1)$, soit, avec la relation de Chasles et un petit changement d'indice : $\sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \leq \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n_0}^{n+1} f(k)$. Maintenant :

- Si la série $\sum_{k \geq n_0} f(k)$ converge, on note S sa somme, et l'on a d'après ce qui précède, par positivité de f :

$$\forall k \geq n_0 + 1,\ \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n_0}^{n+1} f(k) \leq S.$$

  La suite $\left(\int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n \geq n_0}$ est majorée, il en résulte que f est intégrable sur $[n_0, +\infty[$. Par suite, f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

- Supposons réciproquement que f est intégrable sur $[a, +\infty[$. Alors f est également intégrable sur $[n_0, +\infty[$, et l'on a pour tout $n \geq n_0 + 1$, $\sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \leq \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$. La série $\sum_{k \geq n_0+1} f(k)$ est à terme général positif et la suite de ses sommes partielles est majorée, donc cette série converge ; il en est alors de même pour $\sum_{k \geq n_0} f(k)$.

Application 1

Convergence des séries de Riemann $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ si et seulement si $\boxed{\alpha > 1}$.

c. *Equivalent des sommes partielles si divergence, encadrement des restes en cas de convergence*

Soient $a \in \mathbb{R}$, $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq a + 1$, et $f \in C_{mx}([a, +\infty[, \mathbb{R}_+)$.

On suppose que l'application f est **décroissante** et **positive**. Alors,

- Si la série $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ diverge, on a $\boxed{\sum_{k=n_0}^{n} f(k) \underset{n \to +\infty}{\sim} \int_{a}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t}$.

- • Si $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ converge, on a pour tout $n \geq n_0$:

$$\boxed{\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_{n}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Remarques

- Les résultats ci-dessus doivent systématiquement être redémontrés.
- L'encadrement $\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,dt \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_{n}^{+\infty} f(t)\,dt$ permet souvent de déterminer

un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ du reste $\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$ de la série $\sum f(k)$.

Application 2

Détermination d'un équivalent de $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On a : $\boxed{H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n}$.

Application 3

Détermination d'un équivalent de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. On a : $R_n \sim \frac{1}{n}$.

2. Comparaison à des séries usuelles

a. *Comparaison à une série géométrique*

Proposition (règle de d'Alembert)

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite telle que :

i – $(u_n)_{n \geq n_0}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang :

$$\exists\, n_1 \geq n_0 ,\ \forall n \geq n_1 ,\ u_n \neq 0 \ ;$$

ii – $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Alors :

- Si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

•• Si $\ell > 1$, $\sum u_n$ est une série grossièrement divergente.

Preuve

•• Si $\ell > 1$, alors il existe un rang n_0 à partir duquel $u_n \neq 0$ et $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| > 1$; alors la suite $(|u_n|)_{n \geq n_0}$

est à valeurs strictement positives, et elle est croissante. Il en résulte que la suite (u_n) ne tend pas vers 0, et ainsi la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

- Si $\ell < 1$:

Dans ce cas, considérons un réel q tel que $\ell < q < 1$. Il existe un rang n_0 à partir duquel $u_n \neq 0$ et $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq q$. On obtient alors par une récurrence évidente :

$$\forall\, n \geq n_0\,,\ 0 \leq \left|u_n\right| \leq \frac{\left|u_{n_0}\right|}{q^{n_0}}\, q^n\,.$$

Or la série géométrique $\frac{\left|u_{n_0}\right|}{q^{n_0}} \sum q^n$ converge, puisque $|q| < 1$. D'après le théorème de comparaison pour les séries de terme général positif, $\sum \left|u_n\right|$ converge.

Application 4

Montrer que la série $\sum n^2 q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$.

Remarque : la règle de d'Alembert ne s'applique qu'à des séries dont la convergence/divergence est très rapide (au pire, de l'ordre de celle d'une série géométrique). Chercher à l'appliquer dans des cas plus complexes serait irréaliste, et serait considéré comme une faute de cours.

b. *Comparaison à une série de Riemann*

Proposition (règle du $n^\alpha u_n$)

Soit $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite.

- S'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha \left|u_n\right|$ admet une limite finie, alors $\sum u_n$ converge absolument.
- •• S'il existe un réel $\alpha \leq 1$ tel que $n^\alpha u_n$ admet une limite (*finie ou infinie*) non nulle, la série $\sum u_n$ diverge.

Remarque

L'existence d'un réel $\alpha \leq 1$ tel que $n^\alpha \left|u_n\right|$ admet une limite non nulle ne permet pas de conclure quant à la nature de la série $\sum u_n$ (on ne peut que dire qu'elle ne converge pas absolument).

Preuve

- Supposons qu'il existe $\alpha > 1$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\alpha \left|u_n\right| = \ell$. Alors la suite $\left(n^\alpha \left|u_n\right|\right)_{n \geq 1} = \left(\frac{\left|u_n\right|}{\frac{1}{n^\alpha}}\right)_{n \geq 1}$ est bornée, on a donc, d'après le critère du quotient : $\left|u_n\right| = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

  Or la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge, puisque $\alpha < 1$; le théorème de comparaison pour les séries de terme général positif permet d'en conclure que $\sum \left|u_n\right|$ converge, et que $\sum u_n$ est absolument convergente.

- •• Supposons maintenant qu'il existe $\alpha \leq 1$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ tels que $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\alpha u_n = \ell$.

  Alors (puisque ℓ est non nulle), la suite $\left(n^\alpha u_n\right)$ ne s'annule pas et est de signe constant à partir d'un certain rang, il en est donc de même pour la suite $\left(u_n\right)$; de plus (en posant $\frac{1}{\ell} = 0$ si $\ell = \pm\infty$), on a $\frac{1}{\ell} \in \mathbb{R}$ et $\lim \frac{1}{n^\alpha u_n} = \frac{1}{\ell}$;

alors $\left(\dfrac{1}{n^{\alpha} u_n}\right)$ est une suite bornée, d'après le critère du quotient, ceci implique que $\dfrac{1}{n^{\alpha}} = O\left(u_n\right)$. Or la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ diverge ; ainsi :

La suite $\left(u_n\right)$ est à termes de signe constant à partir d'un certain rang, domine la suite $\left(\dfrac{1}{n^{\alpha}}\right)$, et $\sum \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ diverge.

D'après le théorème de comparaison pour les séries de terme général de signe constant, $\sum u_n$ diverge.

Application 5

Étudier la nature de la série $\sum e^{-\sqrt{n}}$.

Application 6

Étudier la nature de la série $\sum \dfrac{\ln n}{n^{3/2}}$.

3. Théorème spécial des séries alternées (*TSSA ou CSSA*)

Théorème (théorème spécial des séries alternées ou critère spécial des séries alternées)

Soit $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ une série numérique réelle. On suppose que :

i – La suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

ii – $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Alors,

1_ ***Convergence des séries alternées***

$\sum (-1)^n u_n$ converge.

2_ ***Signe et majoration du reste***

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k \text{ est du signe de } (-1)^{n+1}, \text{ et } \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k\right| \leq u_{n+1}.$$

Autrement dit, le reste d'ordre n est du signe de son premier terme, et il est majoré en valeur absolue par son premier terme.

3_ ***Encadrement de la somme par les sommes partielles***

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{2n+1} (-1)^k u_k \leq \sum\limits_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k \leq \sum\limits_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k$.

Preuve

Le principe est simple : introduire la suite $\left(S_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série $\sum (-1)^n u_n$, et montrer que les suites extraites $\left(S_{2n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(S_{2n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. La suite est, normalement, un jeu d'enfant…

Application 7

1. Déterminer la nature de la série harmonique alternée $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

V PRODUITS DE CAUCHY ; FORMULE DE STIRLING

1. Produit de Cauchy de deux séries

i – Définition

Le produit de Cauchy de deux séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ est la série $\sum_{n \geq 0} w_n$ de terme général donné par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}\, v_k\,.$$

ii – Proposition (convergence et somme d'un produit de Cauchy)

Le produit de Cauchy $\sum_{n \geq 0} w_n$ de deux séries **absolument convergentes** $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge,

et l'on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} u_{n-k}\, v_k \right) = \boxed{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)}$.

Preuve (***non exigible***)

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons S_n (resp. S'_n, resp. S''_n) la somme partielle d'ordre n de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ (resp. $\sum_{n \geq 0} v_n$, resp. $\sum_{n \geq 0} w_n$),

et R_n (resp. R'_n, resp. R''_n) le reste d'ordre n de la série convergente $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ (resp. $\sum_{n \geq 0} |v_n|$, resp. $\sum_{n \geq 0} |w_n|$).

Posons enfin $A = \sum_{j=0}^{+\infty} |u_j| + \sum_{i=0}^{+\infty} |v_i|$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} w_k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} u_j\, v_{k-j} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} u_j\, v_{k-j} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n-j} u_j\, v_i = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} u_j\, v_i - \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=n-j+1}^{n} u_j\, v_i\,,$$

donc $W_n = U_n V_n - \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=n-j+1}^{n} u_j\, v_i$. Prouver le résultat voulu revient donc à montrer que la suite

$\left(\sum_{j=0}^{n} \sum_{i=n-j+1}^{n} u_j\, v_i \right)_{n \geq 0}$ converge vers 0.

Soit un réel ε strictement positif. Comme $\lim_{n \to +\infty} R_n = \lim_{n \to +\infty} R'_n = 0$, il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout

$s \geq n_0$, $|R_s| \leq \varepsilon$ et $|R'_s| \leq \varepsilon$. Maintenant, pour tout $n \geq 2\, n_0$:

$$\left|\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=n-j+1}^{n}u_j v_i\right| \leq \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=n-j+1}^{n}|u_j||v_i| = \sum_{j=0}^{n_0}\sum_{i=n-j+1}^{n}|u_j||v_i| + \sum_{j=n_0+1}^{n}\sum_{i=n-j+1}^{n}|u_j||v_i|$$

$$\leq \sum_{j=0}^{n_0}\sum_{i=2n_0-j+1}^{n}|u_j||v_i| + \sum_{j=n_0+1}^{n}\left(|u_j|\sum_{i=0}^{n}|v_i|\right)$$

$$\leq \sum_{j=0}^{n_0}\sum_{i=n_0+1}^{n}|u_j||v_i| + \sum_{j=n_0+1}^{n}\left(|u_j|\sum_{i=0}^{+\infty}|v_i|\right)$$

$$\leq \left(\sum_{j=0}^{n_0}|u_j|\right)\left(\sum_{i=n_0+1}^{+\infty}|v_i|\right) + \left(\sum_{j=n_0+1}^{+\infty}|u_j|\right)\left(\sum_{i=0}^{+\infty}|v_i|\right)$$

$$\leq \left(\sum_{j=0}^{+\infty}|u_j|\right)R'_n + R_n\left(\sum_{i=0}^{+\infty}|v_i|\right),$$

d'où : $\left|\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=n-j+1}^{n}u_j v_i\right| \leq \left(\sum_{j=0}^{+\infty}|u_j| + \sum_{i=0}^{+\infty}|v_i|\right)\varepsilon = A\,\varepsilon$.

Résumons – nous : $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \forall\, n \geq 2n, \left|\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=n-j+1}^{n}u_j v_i\right| \leq A\,\varepsilon$:

C'est dire que la suite $\left(\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=n-j+1}^{n}u_j v_i\right)_{n\geq 0}$ converge vers 0, et ceci achève la démonstration.

Application 8 : séries binomiales négatives

On considère un complexe q tel que $|q| < 1$.

1. A l'aide de la règle de d'Alembert, montrer que, pour tout pour tout $p \in \mathbb{N}$, la ***série binomiale négative p – ième :*** $\boxed{\sum_{n\geq 0}\binom{n+p}{n}q^n}$ est absolument convergente.

2. Démontrer la formule de Pascal généralisée : $\forall\,(r,n) \in \mathbb{N}^2$, $\sum_{k=r}^{n}\binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}$.

3. En déduire par récurrence, à l'aide de produits de Cauchy, que pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+p}{n}q^n = \frac{1}{(1-q)^{p+1}}}.$$

2. Formule de Stirling

Proposition (formule de Stirling)

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n\,\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}\,.}$$

Preuve

Le programme stipule qu'une démonstration de la formule de Stirling n'est pas exigible aux concours, nous l'admettrons donc.

Toutefois, il faut impérativement savoir traiter l'exercice ci – dessous.

Exercice : Une démonstration de la formule de Stirling

Part I – Intégrales de Wallis

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.

2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ I_{2n} = \dfrac{\pi}{2^{2n+1}} \dbinom{2n}{n}$.

3. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, puis que $I_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} I_n$.

4. Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = (n+1) I_{n+1} I_n$.

Montrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante. En déduire que $\dbinom{2n}{n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$.

Part II – Formule de Stirling

On souhaite prouver la formule de Stirling : $n! \underset{n \to +\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2 \pi n}$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, \ u_n = \dfrac{n! \, e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$, et $v_n = \ln(u_n)$.

1. Montrer que $v_{n+1} - v_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

2. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite α non nulle.

3. A l'aide de **Part I**, déterminer α.

4. Conclure.